Université de Montréal

# Invariants de Gromov-Witten et Fibrations Hamiltoniennes.

par

**Clément Hyvrier**

Département de mathématiques et de statistique
Faculté des arts et des sciences

Thèse présentée la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de
Philosophiæ Doctor (Ph.D.)
en Mathématiques

août 2008

# Université de Montréal

Faculté des études supérieures

Cette thèse intitulée

# Invariants de Gromov-Witten et Fibrations Hamiltoniennes.

présentée par

## Clément Hyvrier

a été évaluée par un jury composé des personnes suivantes :

*Octav Cornea*
(président-rapporteur)

*François Lalonde*
(directeur de recherche)

*Shengda Hu*
(co-directeur)

*Iosif Polterovich*
(membre du jury)

*Frédéric Bourgeois*
(examinateur externe)

*Nicole St-Louis*
(représentant du doyen de la FES)

Thèse acceptée le:
*12 août 2008*

# SOMMAIRE

Dans ce travail, nous considérons les invariants de Gromov-Witten (invariants $GW$) associés à des applications pseudo-holomorphes ayant pour domaine une surface de Riemann de genre 0, et ceci dans le cadre particulier des fibrations Hamiltoniennes connexes, fermées, au-dessus d'une base symplectique.

Pour un choix de structure presque complexe compatible en particulier avec la structure de fibration Hamiltonienne, nous obtenons une application entre les espaces de modules des applications (pseudo)-holomorphes dans l'espace total et dans la base.

Nous montrons entre autres que si l'espace de modules de la base n'admet pas de strates réductibles, condition vérifiée par les classes primitives, et si le nombre minimal de Chern de la fibre, $N_F$, satisfait une condition dite de **semi-positivité forte** :

$$N_F \geq \frac{1}{2}\dim P - 2,$$

alors il existe une relation bien définie entre certains invariants de l'espace total, certains invariants de la base ainsi que certains invariants associés à une fibration au-dessus de la 2-sphère.

Nous y montrons aussi que sous certaines conditions de transversalité, la structure de fibration Hamiltonienne induit une structure de fibration entre la compactification verticale de l'espace de modules des applications pseudo-holomorphes dans l'espace total et la strate supérieure de l'espace de modules des applications pseudo-holomorphes dans la base. Nous retrouvons alors la relation obtenue auparavant par intégration le long des fibres de cette fibration.

Nous déduisons notamment de cette formule dite produit, certaines propriétés telles que le scindement de la cohomologie à coefficients rationnels et l'uniréglage symplectique, pour toute fibration Hamiltonienne au dessus d'une base pour laquelle il existe une sphère pseudo-holomorphe passant par au moins deux points.

**Mots clés :** fibration Hamiltonienne, structure presque complexe, application pseudo-holomorphe, système Fredholm, invariant de Gromov-Witten, recollement, application balancée, homologie quantique, c-splitting, uniréglage symplectique.

# SUMMARY


In this work, we consider the rational Gromov-Witten invariants, or simply $GW$-invariants, in the context of closed connected Hamiltonian fibrations over any symplectic base.

For a choice of almost complex structure that is in particular compatible with the Hamiltonian fibration structure, we obtain a map between the moduli spaces of pseudo-holomorphic maps in the total space and in the base space.

We show that there exists a well-defined relation, called product formula, between some $GW$-invariants of the total space, some $GW$-invariants of the base space and some $GW$-invariants associated to a fibration over $S^2$. This is proved under a strong semi-positivity assumption for the fiber of the fibration, which essentially gives an lower bound for the minimal Chern number of the fiber in terms of the dimension of the total space, and the assumption that the compactification of the moduli space of maps in the base doesn't admit reducible strata (this latter condition is in particular realized by primitive classes).

It is also shown under some transversality condition, that the Hamiltonian fibration structure induces une structure of fibration on the vertical compactification of the moduli space of pseudo-holomorphic maps in the total space over the top stratum of the moduli space of pseudo-holomorphic maps in the base. We then recover the product formula mentioned above by means of integration over the fibers of this fibration.

Eventually, we give an example of computation, and also deduce from the formula the rational cohomology splitting and symplectic uniruledness, for any Hamiltonian fibration over a base which admits one pseudo-holomorphic sphere passing through at least two points.

**Key words :** Hamiltonian fibration, almost complex structure, pseudo-holomorphic map, Fredholm system , Gromov-Witten invariant, gluing, balanced map, quantum homology, c-splitting, symplectic uniruledness.

# TABLE DES MATIÈRES

# REMERCIEMENTS

Je voudrais avant tout remercier mon directeur, François, pour m'avoir donné l'opportunité avec tant de jovialité d'effectuer ce travail avec lui, et de m'avoir introduit au monde de la topologie symplectique. Je le remercie pour son soutien et son intérêt constant, même dans les moments les plus délicats, ainsi que pour son imagination toujours débordante, ses discussions lumineuses et enrichissantes, et ses conseils qui m'auront permis d'avancer plus avant dans le monde des mathématiques. Je remercie aussi mon co-directeur, Shengda, pour ses idées toujours florissantes, et d'avoir sû à tout instant et sans jamais perdre patience, répondre à toutes mes questions durant de longues heures. Je le remercie encore de m'avoir éclairé avec tant de brio et une extrême gentillesse, sur certains points qui n'étaient alors que d'obscurs horizons pour moi.

Je n'oublie pas Octav Cornea qui a été présent dès mes débuts à l'université de Montréal, et qui m'a révélé et expliqué tant de choses avec une extrême finesse, dans ses cours ou ailleurs ; et bien d'autres personnes du département telles Iosif Polterovich, Marlène Frigon (pour ne citer qu'eux) pour avoir été des professeurs et conseillers admirables. Enfin je tiens à remercier Frédéric Bourgeois pour avoir si volontairement accepté d'inspecter les moindres recoins de ma thèse. Bien évidemment je remercie plus généralement tous les membres du jury.

Ces années n'auraient probablement été les mêmes sans mes fidèles compagnons de route avec qui j'ai partagé des discussions si enflammées tant mathématiques qu'autres. Il y a Baptiste l'artiste, celui qui réfléchit plus vite que son ombre et que celles des autres, et à qui je souhaite de rencontrer Corto Maltèse et Nietzsche. Rémi au coeur d'or, avec qui il est possible de discuter en toute mauvaise foi d'esthétisme, et qui sait si bien se faire comprendre des videurs. Eveline sa douce moitié, qui n'est pas féministe. Gabriel maître presque incontesté, si ce n'est par Rémi, en jeu de mots douteux, et pour qui le monde sans les Beatles ne serait pas le monde. Liam l'enjoué et sa classe vestimentaire naturelle, surtout son T-shirt Astroboy. Alex la puce, qui dans ses meilleurs jours trouve que tout est encore plus magnifique qu'à la seconde précédente. Enfin Xavier alias Monsieur X, qui est né avec un yoyo dans la main, et encore pleins d'autres : Anouk, Etienne, Marie-Eve, Catherine, Nadine, Carlos, Phil....et tous mes amis de Belgique évidemment.

Bien entendu, je remercie énormément ma famille, qui a toujours cru en moi, toujours et dans toutes les situations. Je n'oublie pas non plus ma belle-famille qui m'ont eux aussi toujours assistés. Pour finir je ne saurais assez remercier ma femme que j'aime tant, Annie, qui est plus dure que le roc et qui a sû me supporter moi et mes angoisses pendant mes longues veillées interminables et me redonner confiance en tout temps.

# INTRODUCTION

Dans ce travail, nous considérons les invariants de Gromov-Witten (invariants $GW$) associés a des applications pseudo-holomorphes ayant pour domaine une surface de Riemann de genre 0, et ceci dans le cadre particulier des fibrations Hamiltoniennes connexes, fermées, au-dessus d'une base symplectique notée $(B, \omega_B)$. Ce travail étend certains aspects présentés dans [**29**] où le contexte est celui des fibrations Hamiltoniennes au-dessus de surfaces de Riemann.

Pour une variété symplectique générale, ces invariants comptent le nombre algébrique de sphères pseudo-holomorphes simples d'aire fixée qui intersectent transversalement des cycles donnés de la variété en $l$ points. Dans les meilleurs cas possibles, en particulier le cas semi-positif, ces invariants de la structure symplectique, peuvent être vus comme une $\mathbb{Z}$-forme multinéaire sur le $l$-produit tensoriel de l'homologie singulière de la variété.

Dans le cas d'un produit trivial, Ruan et Tian en 1995 [**38**], ainsi que Kontsevich et Manin peu après [**17**], ont montré que lorsque la base et la fibre sont toutes deux semi-positives, les invariants $GW$ de l'espace total sont donnés par des produits de certains invariants $GW$ dans la base et dans la fibre. Cette propriété leur permet en l'occurrence de déduire le scindement du produit quantique dans cette situation précise, lequel produit est une déformation du produit cup en cohomologie. Il est ainsi à priori impossible d'espérer avoir un tel scindement dans le cas non-trivial. Néanmoins, il est raisonnable de se poser la question suivante : quelles relations algébriques existe-t-il, s'il y a lieu, entre les invariants de la base, de la fibre et de l'espace total ?

Nous établissons une relation, suggérée en particulier dans [19], qui est analogue à celle du cas trivial.

## LE CONTEXTE

Généralement, une fibration Hamiltonienne est une fibration localement triviale

$$F \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} B,$$

avec fibre de référence symplectique $(F, \omega)$, et dont le groupe de structure se réduit au groupe des difféomorphismes Hamiltoniens de la fibre $\mathrm{Ham}(F, \omega)$. De telles fibrations sont des exemples particuliers de fibrations symplectiques pour lesquelles le groupe de structure est contenu dans le groupe des symplectomorphismes de la fibre $\mathrm{Symp}(F, \omega)$. Ces fibrations sont par définition munies d'une famille $\{\omega_b\}_{b \in B}$, de formes symplectiques pour les fibres $F_b := \pi^{-1}(b)$.

Bien entendu, le fibré trivial $B \times F$ est un exemple de fibration Hamiltonienne. Une classe moins triviale et de grand intérêt est celle des fibrations Hamiltoniennes au-dessus de $S^2$ qui correspondent à isomorphisme de fibré près aux classes d'homotopie de lacets de difféomorphismes Hamiltoniens dans $(F, \omega)$. Ce lien direct avec le groupe fondamental de $\mathrm{Ham}(F, \omega)$ en font donc naturellement des objets intéressants à étudier dans le cadre de la topologie symplectique. Citons notamment les travaux de Seidel [41] menant à l'isomorphisme éponyme en Homologie de Floer.

Moins spécifiquement, les fibrations Hamiltoniennes sont caractérisées par les deux propriétés suivantes, tel que montré initialement dans [9] (pour une autre référence cf. [29]) :

**Théorème.** (*Guillemin-Lerman-Sternberg*) *Soit* $(F, \omega) \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} B$ *une fibration symplectique, alors cette fibration est Hamiltonienne si et seulement si :*

i) *$P$ est symplectiquement triviale au-dessus du 1-squelette de $B$ ;*

ii) *il existe une connexion $Hor_\tau \subset TP$ sur $P$ avec holonomie dans $Ham(F, \omega)$, qui est induite par une 2-forme fermée canonique $\tau \in \Omega^2(P)$, appelée* ***forme de couplage****, qui étend la famille $\{\omega_b\}_{b \in B}$.*

La deuxième propriété permet en l'occurrence, lorsque $B$ est fermée et symplectique, de munir l'espace total de ces fibrations particulières de structures symplectiques compatibles avec la famille $\{\omega_b\}_{b\in B}$ contrairement au cas des fibrations symplectiques, et ceci simplement en considérant les 2-formes

$$\omega_{P,\epsilon} := \tau + \epsilon\pi^*\omega_B,$$

où $\epsilon > 0$ est un réel assez grand pour compenser les dégénerescences occasionnées en prenant la somme de $\tau$ avec $\pi^*\omega_B$.

En vue d'établir une relation entre les invariants $GW$ de base avec ceux de l'espace total, nous équipons $P$ avec une structure (presque) complexe $J_P$, qui préserve à la fois la distribution horizontale $\mathrm{Hor}_\tau$ et la projection $\pi$. Pour être plus précis nous demanderons que $J_P$ se projette via $d\pi$ sur une une structure presque complexe $J_B$ de la base qui est $\omega_B$-compatible, qu'elle préserve le sous-espace $\mathrm{Hor}_\tau$ pour $\tau$ donnée, et que sa restriction à chaque fibre $F_b$ est une structure presque complexe $\omega_b$-compatible.

Ces structures sont dites compatibles par rapport à $\pi$ et $\tau$ ou plus simplement **fibrées**. Si

$$\mathcal{J}(B,\omega_B), \quad \mathcal{J}^{vert}(P,\pi,\omega) \quad \text{et} \quad \mathcal{H},$$

désignent respectivement l'ensemble des structures presque complexes $\omega_B$-compatibles dans $B$, l'ensemble des familles de structures presque complexes $\omega_b$-compatibles dans les fibres, et enfin l'ensemble des déformations exactes de la connexion Hamiltonienne, alors l'ensemble des structures fibrées est paramétré par le produit

$$\mathcal{P} \equiv \mathcal{P}(\pi,\tau,\omega,\omega_B) := \mathcal{J}(B,\omega_B) \times \mathcal{J}^{vert}(P,\pi,\omega) \times \mathcal{H}.$$

Un triplet de cet ensemble, $(J_B, J, H)$, sera souvent dénoté $J_P^H$ pour simplifier. L'existence de telles structures est assurée par la contractibilité de chacun des ensembles dans le produit ci-dessus ([28]). Nous soulignons enfin que pour une connexion fixée ($H$ fixé) ainsi qu'une structure symplectique $\omega_{P,\epsilon}$ sur $P$, l'ensemble des structures fibrées associées est strictement contenu dans l'ensemble des structures complexes maîtrisant $\omega_{P,\epsilon}$ ($\omega_{P,\epsilon}$-tame).

STRUCTURE DES ESPACES DE MODULES

Il s'ensuit de notre choix de structures complexes fibrées que la projection $\pi$ induit naturellement une application, notée encore $\pi$, entre les espaces de modules des applications pseudo-holomorphes avec $l$ points marqués :

$$\pi : \mathcal{M}_{0,l}(P, \sigma, J_P^H) \longrightarrow \mathcal{M}_{0,l}(B, \sigma_B, J_B),$$

où les 2-classes d'homologie $\sigma \in H_2(P, \mathbb{Z})$ et $\sigma_B \in H_2(B, \mathbb{Z})$ sont telles que $\pi_* \sigma = \sigma_B \neq 0$.

Remarquons qu'un résultat standard, notamment démontré dans **[30]**, **[29]**, **[36]**, **[38]**, nous donne que les sous-ensembles des éléments irréductibles des espaces de modules ci-dessus, sont des variétés ouvertes orientées de dimensions finies et ceci pour un choix générique de structures presque complexes maîtrisants (et plus particulièrement compatibles) une structure symplectique donnée. Seulement, comme déjà mentionné, ces structures pour l'espace total ne coïncident pas avec les structures fibrées et nous voulons préserver l'application $\pi$.

Si $j_0$ désigne la structure complexe standard sur $S^2$, ces espaces de modules correspondent aux solutions des opérateurs de Cauchy-Riemann associés respectivement aux structures presques complexes $J_P^H$ et $J_B$ :

$$\overline{\partial}_{J_P^H} := \frac{1}{2}(d + J_P^H \circ d \circ j_0) \quad \text{et} \quad \overline{\partial}_{J_B} = \frac{1}{2}(d + J_B \circ d \circ j_0).$$

Ces opérateurs sont en réalité des sections de fibrations de Banach au-dessus d'espaces de Banach

$$\mathcal{E}_P(\sigma, J_P^H) \longrightarrow \mathcal{B}_P(\sigma) \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_B(\sigma_B, J_B) \longrightarrow \mathcal{B}_B(\sigma_B),$$

les espaces de base étant des complétions appropriées de $C^\infty(S^2, P)$ et $C^\infty(S^2, B)$. Les triplets

$$(\mathcal{B}_P(\sigma), \mathcal{E}_P(\sigma, J_P^H), \overline{\partial}^H_{J_P}) \quad \text{et} \quad (\mathcal{B}_B(\sigma_B), \mathcal{E}_B(\sigma_B, J_B), \overline{\partial}_{J_B})$$

sont des systèmes de Fredholm, dans le sens donné entre autres dans **[4]**, mis à part pour la compacité des ensembles solutions (zéros des sections). Dans notre contexte la projection $\pi$ induit une submsersion de systèmes Fredholm, telle que décrite dans le deuxième chapitre. La raison en est que, pour $D$ la linéarisation de $\overline{\partial}_{J_P^H}$ et $D^B$ celle de $\overline{\partial}_{J_B}$, nous avons la relation :

$$\pi_* \circ D = D^B \circ \pi_*.$$

Il en découle que nous avons une suite exacte reliant entres autres noyaux et conoyaux des opérateurs Fredholm ci-dessus :

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \ker D_u^v \longrightarrow \quad \ker D_u \quad &\longrightarrow \ker D_{\pi(u)}^B \longrightarrow \\ \longrightarrow \quad \operatorname{coker} D_u^v \quad &\longrightarrow \operatorname{coker} D_u \longrightarrow \operatorname{coker} D_{\pi(u)}^B \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

où $D^v$ désigne ici la restriction de $D$ aux champs de vecteurs le long d'éléments de $C^\infty(S^2, P)$ à valeurs dans le sous-fibré $\ker d\pi \subset TP$, et $u \in C^\infty(S^2, P)$. En faisant usage de cette suite nous obtenons le résutat essentiel suivant concernant la transversalité :

**Théorème 0.0.1.** (*Hyvrier 2008*) *Supposons $\sigma_B \neq 0$. Il existe un ensemble $\mathcal{P}_{reg} \subset \mathcal{P}$ de deuxième catégorie Baire de structures presque complexes fibrées tel que :*

1) *pour tout $J_P^H = (J_B, J, H) \in \mathcal{P}_{reg}$, les espaces de modules :*

$$\mathcal{M}_{0,l}^{**}(P, \sigma, J_P^H) \quad et \quad \mathcal{M}_{0,l}^{*}(B, \sigma_B, J_B),$$

*sont des variétés orientées ouvertes de dimensions respectives $Ind(D)$ et $Ind(D^B)$, où $\mathcal{M}_{0,l}^{**}(P, \sigma, J_P^H)$ désigne la restriction des applications simples qui se projettent sur des applications simples.*

2) *étant donné un ensemble dénombrable $A$ d'éléments de $\mathcal{M}_{0,l}^{*}(B, \sigma_B, J_B)$, pour tout $u \in A$ la préimage $\pi^{-1}(u)$ est une variété orientée de dimension l'indice de $D^v$.*

Nous devons préciser que la restriction aux applications ayant des projections irréductibles est essentielle sans quoi la transversalité pourrait ne pas être réalisable à priori, du moins via des techniques standards. La preuve, soulignons-le aussi, nécessite de faire varier la connexion afin d'obtenir le scindement de la suite exacte ci-dessus au niveau des espaces de modules universels, et généralise la preuve donnée par McDuff et Salamon dans le cadre des fibrations Hamiltoniennes au-dessus de surfaces de Riemann ([29] chapitre 8).

Plus généralement, $\pi$ induit, lorsque composée avec une application dite de stabilisation, une application

$$\mathcal{F}_\pi : \overline{\mathcal{M}}_{0,l}(P, \sigma, J_P^H) \longrightarrow \overline{\mathcal{M}}_{0,l}(B, \sigma_B, J_B),$$

entre la compactification des espaces de modules en jeu. En général cette compactification, est un espace stratifié dont chaque strate peut être représentée par une **donnée de strate stable** tel que montré dans [16]. Une donnée de strate stable, $\mathcal{S}$, consiste en un arbre avec tiges plus une décomposition vectorielle effective de la 2-classe d'homologie considérée au départ, le tout satisfaisant une certaine condition de stabilité.

Pour deux telles strates $\mathcal{M}_{\mathcal{S}_P}(P)$ et $\mathcal{M}_{\mathcal{S}_B}(B)$ telles que

$$\mathcal{F}_\pi : \mathcal{M}_{\mathcal{S}_P}(P) \longrightarrow \mathcal{M}_{\mathcal{S}_B}(B),$$

nous pouvons encore relier les systèmes de Fredholm associés, et nous obtenons conséquemment une suite exacte telle que décrite précédemment. Cette suite nous permet en l'occurrence de réaliser génériquement la transversalité sur l'ensemble des éléments irréductibles de $\mathcal{M}_{\mathcal{S}_P}(P)$ si toutefois $\mathcal{M}_{\mathcal{S}_B}(B)$ ne contient pas d'élément réductible.

## La formule produit

Lorsque le nombre minimal de Chern de la fibre, $N_F$, satisfait une condition dite de **semi-positivité forte** :

$$N_F \geq \frac{1}{2}\dim P - 2, \tag{0.0.1}$$

nous montrons qu'une formule produit analogue à celle du cas trivial [**38**], est réalisée pour un choix générique de structures presque complexes fibrées sur $P$.

Géométriquement, la formule se base sur l'observation suivante. Étant donné $C'$ l'image d'une application $J_P^H$-holomorphe $u$ dans $P$, sa projection via $\pi$ nous donne une application $J_B$-holomorphe, notée $u_B$, d'image $C$. En supposant que $u_B$ est simple, de sorte que

$$\sigma_B \neq 0,$$

alors $C'$ peut être aussi vue comme une section pseudo-holomorphe $C''$ de la restriction $P|_C$. Ainsi, en oubliant les contraintes géométriques pour le moment, compter le nombre algébrique de $C'$ dans $P$, revient à dénombrer les $C''$ et ceci pour chaque image $C$ apparaissant dans $B$. En l'occurrence, la formule produit exprime l'indépendance du nombre de $C''$ vis-à-vis de $C$.

Explicitement, désignons par $H_*(B), H_*(P)$ et $H_*(F)$ les groupes d'homologie singulière modulo torsion des espaces correspondants. Considérons des classes $c_1^B, ..., c_l^B \in H_*(B)$ et des classes $c_1^F, ..., c_l^F \in H_*(F)$. Il nous faut considérer des classes dans $H_*(P)$ qui proviennent soit de classes dans $H_*(B)$ ou de classes dans $H_*(F)$. Plus précisément :

$$\begin{cases} c_i^B = pt & \text{pour } i = 1, ..., m \text{ et } 0 \leq m \leq l, \\ c_i^F = [F] & \text{pour } i = m+1, ..., l, \text{ où } m \text{ est tel que ci-dessus,} \\ c_i^P = \iota_F^P(c_i^F) & \text{pour } i = 1, ..., m, \\ c_i^P = \pi^{-1}(c_i^B) & \text{pour } i = m+1, ..., l. \end{cases} \tag{0.0.2}$$

Sous ces notations la formule produit s'énonce comme suit :

**Théorème 0.0.2.** *(Hyvrier 2008) Soit $\pi : P \to B$ une fibration Hamiltonienne dont la fibre satisfait la condition* (0.0.1). *Soit $\sigma \in H_2(P; \mathbb{Z})$ et supposons que la classe $\sigma_B := \pi_*(\sigma) \neq 0$ n'admet que des décompositions effectives irréductibles. Soient $c_i^P, c_i^B, c_i^F$ tels que* (0.0.2) *est validée. Alors pour un choix générique de structure presque complexe fibrée nous avons :*

$$GW_{0,l}^P(c_1^P, ..., c_k^P; \sigma) = \sum_j GW_{0,l}^{P|_C}(\iota_F^{P|_C}(c_1^F), ..., \iota_F^{P|_C}(c_r^F); \sigma_j) GW_{0,l}^B(c_1^B, ..., c_l^B; \sigma_B),$$

*où $C$ est l'image d'une application (pseudo) holomorphe comptée dans*

$$GW_{0,l}^B(c_1^B, ..., c_l^B; \sigma_B),$$

*$\iota_F^{P|_C}$ désigne l'inclusion de $F$ dans $P|_C$, et les $\sigma_j$ sont toutes les classes d'homologie de $P|_C$ qui sont envoyées sur $\sigma$ via $\iota_{P|_C}^P$ l'inclusion de $P|_C$ dans $P$.*

Il est à souligner que la somme doit être finie par compacité de Gromov. Nous devrions aussi mentionner que la condition d'irréductibilité sur $\sigma_B$ est en l'occurrence réalisée par des classes primitives.

Un élément important en vue d'établir cette formule, est de montrer que les invariants $GW$ impliqués sont effectivement bien définis. Cela est réalisé en montrant que pour un ensemble générique de structures fibrées $\mathcal{P}_{reg}$, les applications d'évaluation en les $l$-points marqués :

$$ev_l^P, \quad ev_l^B \quad \text{et} \quad ev_l^{P|_C},$$

sont des pseudo-cycles qui reste dans la même classe de bordisme sous changement de triplet $(J_B, J, H)$ dans $\mathcal{P}_{reg}$. C'est ici que la condition de forte semi-positivité est nécessaire, en l'occurrence pour s'assurer que le bord de l'espace de module des courbes simples est de codimension au moins 2. La condition d'irréductibilité sur $\sigma_B$ est, comme nous l'avons déjà mentionné, requise pour des questions de transversalité. En particulier, elle nous assure que pour toute strate apparaissant dans la compactification de l'espace de modules d'applications holomorphes dans $P$, nous n'avons pas de composante simple se projetant sur un revêtement ramifié non-constant dans $B$.

Une fois assuré que ces invariants sont en effet bien définis, la formule est obtenue formellement à partir de la trivialité de $P$ au-dessus du 1-squelette de $B$, des orientations compatibles des espaces de modules impliqués, ainsi que de l'observation géométrique faite au début de cette section.

## Fibration d'espaces de modules

Nous nous intéressons aussi à la nature de l'application

$$\mathcal{F}_\pi : \overline{\mathcal{M}}(P, \sigma, J_P^H) \longrightarrow \overline{\mathcal{M}}(B, \sigma_B, J_B).$$

Si nous supposons que cette application est une fibration (lisse) au-dessus de la strate supérieure de l'espace de module d'arrivée, nous montrons que nous retrouvons la formule produit par intégration le long des fibres de $\mathcal{F}_\pi$.

Que cette application (au-dessus de la strate supérieure) est bien une fibration est en l'occurrence assez délicat à montrer. Le fait est que, en supposant les opérateurs linéarisés impliqués dans la suite exacte ci-dessus surjectifs nous avons bien que

$$\pi : \mathcal{M}_{0,l}(P, \sigma, J_P^H) \longrightarrow \mathcal{M}_{0,l}(B, \sigma_B, J_B)$$

est une submersion lisse, cependant cette application n'est pas propre. Pour combler ce manque de compacité nous considérons la compactification de l'espace de module au-dessus de la strate supérieure. La compacité n'est dès lors plus un problème mais la structure lisse n'est pas claire.

Toutefois, dans le contexte où $B = pt$ Chen et Li définissent dans [3] un atlas lisse sur $\overline{\mathcal{M}}_{0,l}(P, \sigma, J_P)$ dont les cartes sont données par des applications de recollement :

**Théorème.** (*Chen, Li, 2006*) *Soit* $(P, \omega_P)$ *une variété symplectique, et soit* $J_P$ *une structure presque complexe maîtrisante telle que pour toute les strates de* $\overline{\mathcal{M}}_{0,l}(P, \sigma, J_P)$, *la transversalité est réalisée. Alors* $\overline{\mathcal{M}}_{0,l}(P, \sigma, J_P)$ *est une orbi-variété lisse.*

L'élément crucial est l'utilisation d'applications dites balancées qui permettent de définir une slice naturelle pour l'action du groupe des reparamétrisations de $S^2$, s'il y a lieu, et par là même d'obtenir des applications de recollement bien définies après quotient.

Nous adaptons leur approche dans le contexte plus général qui est le nôtre. En particulier, nous construisons des applications de recollement bien définies, et ceci de façon compatible avec la projection $\pi$, ce qui se traduit par

$$\pi \circ Gl^P = Gl^B \circ \mathcal{F}_\pi$$

où $Gl^P$ et $Gl^B$ désignent respectivement les gluings dans l'espace total et dans la base. Nous en dérivons le résultat suivant :

**Théorème 0.0.3.** (*Hyvrier 2008*) *Sous des conditions de transversalité analogues au théorème précédent, les espaces de modules* $\overline{\mathcal{M}}(P, \sigma, J_P^H)$ *et* $\overline{\mathcal{M}}(B, \sigma_B, J_B)$ *sont des orbi-variétés lisses, et l'application*

$$\mathcal{F}_\pi : \overline{\mathcal{M}}(P, \sigma, J_P^H) \longrightarrow \overline{\mathcal{M}}(B, \sigma_B, J_B),$$

*se restreint à une fibration (d'orbi-variétés) lisse localement triviale au-dessus de chaque strate donnée de* $\overline{\mathcal{M}}(B, \sigma_B, J_B)$. *Dans ce cas, la formule produit peut être* *retrouvée par intégration le long des fibres de $\mathcal{F}_\pi$ au-dessus de la strate supérieure de $\overline{\mathcal{M}}_{0,l}(B, \sigma_B, J_B)$.*

Nous devrions remarquer que la condition de transversalité en question est en particulier réalisée par les fibrations projectives au-dessus d'espaces projectifs.

## Quelques applications

En 1997, Seidel définit dans [**41**], une représentation fidèle

$$\Psi : \mathcal{L}\mathrm{Ham}(F, \omega) \longrightarrow \mathrm{Aut}(QH_*(F, \omega)),$$

de l'espace des lacets Hamiltoniens d'une variété symplectique donnée, dans les automorphismes de l'homologie quantique de cette même variété.

Dans leur article [**20**] sur les fibrations Hamiltoniennes au-dessus de $S^2$, Lalonde, McDuff et Polterovich utilisent cette propriété de fidélité pour entre autres montrer que :

**Théorème.** (*Lalonde, McDuff, Polterovich 1999*) *Soit* $(F, \omega) \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} S^2$ *une fibration Hamiltonienne, alors la cohomologie à coefficients rationnels de l'espace total se scinde en tant que module, précisément :*

$$H^\star(P; \mathbb{Q}) \cong H^\star(S^2; \mathbb{Q}) \otimes H^\star(F; \mathbb{Q}).$$

En reprenant la nomenclature utilisée dans [**20**] et aussi dans [**19**], on dira qu'une fibration $F \hookrightarrow P \longrightarrow B$ est **c-split** si nous avons :

$$H^\star(P; \mathbb{Q}) \cong H^\star(B; \mathbb{Q}) \otimes H^\star(F; \mathbb{Q}),$$

en tant que modules bien entendu. Dans [**19**], les auteurs montrent que pour un vaste éventail de fibrations Hamiltoniennes, cette propriété de scindement est vérifiée, entre autres pour les fibrations au-dessus de $\mathbb{C}P^n$. La preuve qui en est faite peut être vue comme un cas particulier du résultat suivant, dans le cadre d'une fibration Hamiltonienne qui vérifient la condition de forte semi-positivité.

**Théorème 0.0.4.** (*Hyvrier 2008*) *Soit* $(F, \omega) \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} (B, \omega_B)$ *une fibration Hamiltonienne et* $\sigma_B \in H_2(B; \mathbb{Z})$, *telles que les hypothèses du théorème* 0.0.2 *sont satisfaites. Supposons de surcroît que*

$$GW^B_{0,l}(c^B_1, ..., c^B_l; \sigma_B) \neq 0,$$

*pour des classes* $c_i^B$ *telles que* $c_1^B = c_2^B = pt$. *Alors* $P$ *est c-split.*

Ce théorème est une simple conséquence de la formule produit et de la fidélité de la représentation de Seidel. On peut entre autres appliquer ce résultat en particulier pour montrer que toute fibration Hamiltonienne au-dessus de $S^2 \times S^2$ satisfaisant 0.0.1 est c-split.

Aussi, nous employons cette formule produit pour dériver la propriété d'uniréglage symplectique pour des fibrations Hamiltoniennes au-dessus de certaines variétés qui sont déjà uniréglées. Rappelons que, tel que défini (entre autres) dans [**12**], une variété symplectique $(B, \omega_B)$, est dite **(symplectiquement) uniréglée** s'il existe un invariant $GW$ non nul avec au moins un point comme contrainte, autrement dit s'il existe $\sigma_B \in H_2(B, \mathbb{Z})$ et des classes d'homologie $c_i^B \in H_*(B)$, $i = 1, ..., l$, telles que $c_1^B = pt$ et

$$GW_{0,l}^B(c_1^B, ..., c_l^B; \sigma_B) \neq 0.$$

Cela est donc en particulier vrai si nous avons deux points comme contraintes, et nous avons :

**Théorème 0.0.5.** *Soit* $(F, \omega) \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} (B, \omega_B)$ *une fibration Hamiltonienne et* $\sigma_B \in H_2(B; \mathbb{Z})$, *telles que les hypothèses du théorème* 4.3.2 *sont satisfaites. Supposons de surcroît que*

$$GW_{0,l}^B(c_1^B, ..., c_l^B; \sigma_B) \neq 0,$$

*pour des classes* $c_i^B$ *telles que* $c_1^B = c_2^B = pt$. *Alors* $P$ *est symplectiquement uniréglée.*

## Organisation de la thèse

Dans le premier chapitre nous rappelons la notion de fibration Hamiltonienne et nous y définissons forme de couplage ainsi que les structures presque complexes fibrées. Nous définissons aussi dans ce chapitre une connexion affine particulière sur l'espace total $P$ dont la torsion est donnée par la courbure symplectique de la connexion Hamiltonienne induite par la forme de couplage. Nous donnons aussi un bref rappel de la correspondance entre le groupe fondamental des difféomorphismes Hamiltoniens d'une variété symplectique $(F, \omega)$ avec les classes d'isomorphisme des fibrations Hamiltoniennes au-dessus de $S^2$ de fibre $(F, \omega)$.

Le chapitre suivant est dévoué à la linéarisation du problème de Cauchy-Riemann associé aux structures complexes fibrées. Il y est montré que le processus de linéarisation est compatible avec la projection $\pi$. En particulier, nous montrons que l'opérateur de Fredholm obtenu comme linéarisation de l'opérateur de Cauchy-Riemann dans l'espace total, se projette sur l'opérateur de Fredholm obtenu comme linéarisation de l'opérateur de Cauchy-Riemann dans la base. Nous en dérivons le résultat principal sur la transversalité cité plus haut, et nous expliquons pourquoi il est important de considérer seulement les applications simples dans l'espace total qui se projettent sur des applications simples de la base.

Dans la troisième partie nous décrivons pour commencer la compactification des espaces de modules dans le cas fibré. Nous appliquons ensuite de façon itérative le résultat de transversalité précédent, de sorte à montrer que la transversalité est réalisée de façon compatible avec $\pi$ et cela pour toutes les strates réduites se projetant sur des strates réduites.

Ces résultats dits de structure, nous assurent que les invariants de Gromov-Witten que nous voulons considérer sont en effet bien définis dès que l'on suppose la condition de forte semi-postivité, ce que nous expliquons dans le Chapitre 4. En particulier, nous y rappelons très brièvement la notion de pseudo-cycles et nous y définissons précisément les invariants de Gromov-Witten. Enfin, nous y dérivons la formule produit.

Nous présentons dans le Chapitre 5, une version intégrale de la formule produit. Avant de ce faire, nous exposons comment le recollement d'applications holomorphes dans une fibration Hamiltonienne peut être réalisé lui aussi de façon compatible avec la projection $\mathcal{F}_\pi$ entre les espaces de modules. Nous montrons en l'occurrence que ces recollements définissent des cartes qui nous assurent que la restriction de $\mathcal{F}_\pi$ à n'importe quelle strate dans (la compactification de) l'espace de modules des applications holomorphes de la base, est une fibration lisse localement triviale. Cette dernière propriété nous permet de définir sur l'espace de modules de l'espace total une notion d'intégration le long des fibres.

Quant au dernier chapitre, nous y présentons un exemple particulier de fibration projective au-dessus de $\mathbb{C}P^2$ qui induit une fibration d'espaces de modules et pour laquelle nous calculons en guise d'illustration un invariant de Gromov-Witten en faisant usage de la formule produit. Enfin nous y explicitons les applications concernant le scindement cohomologique et l'uniréglage symplectique.

Pour terminer, nous avons mis en appendice un résultat technique que nous utilisons lors de la preuve de la transversalité sur toutes les strates.

# Chapitre 1

## FIBRATIONS HAMILTONIENNES

Nous commençons par introduire la notion de fibration hamiltonienne, c'est à dire un fibré $\pi : P \longrightarrow B$ en fibre symplectique $(F, \omega)$ dont le groupe de structure se réduit au groupe $Ham(F, \omega)$ des difféomorphismes hamiltoniens de $F$. Nous énoncerons un résultat caractérisant ces fibrations dû à Guillemin, Lerman et Sternberg. Nous inspecterons aussi de plus près le cas où $B$ est la sphère de Riemann.

Avant toute chose nous allons présenter quelques rappels sur le groupe des difféomorphismes symplectiques. Cette exposition suit essentiellement [28].

### 1.1. Les groupes Symp et Ham

Soit $(M, \omega)$ une variété symplectique fermée. Soit $\mathcal{X}(M)$ l'ensemble des champs de vecteurs sur $M$ et $\Omega^1(M)$ les 1-formes sur $M$. La non dégénérescence de $\omega$ nous fournit un isomorphisme linéaire canonique entre ces deux espaces :

$$\mathcal{X}(M) \ni X \longmapsto \iota(X)\omega := \omega(X, \cdot) \in \Omega^1(M)$$

**Définition 1.1.1.** $X \in \mathcal{X}(M)$ *est :*

(i) *symplectique ssi* $d(\iota(X)\omega) = 0$,

(ii) *hamiltonien ssi il existe* $H \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ *telle que* $\iota(X)\omega = dH$.

Considérons maintenant le sous-groupe $\mathrm{Symp}(M, \omega) \subset \mathrm{Diff}(M)$ des difféomorphismes qui préservent la forme symplectique $\omega$ i.e :

$$\phi \in \mathrm{Symp}(M, \omega) \quad ssi \quad \phi^* \omega = \omega$$

où $\phi^*$ dénote le pull-back par $\phi$.

Afin d'introduire le groupe $\mathrm{Ham}(M, \omega)$ nous allons nous intéresser aux champs de vecteurs associés à certaines isotopies symplectiques (i.e famille à un paramètre de difféomorphismes symplectiques). Soit $\{\phi_t\}_{t\in[0,1]}$ une famille de symplectomorphismes telle que $\phi_0 = id$. On lui associe la famille de champs de vecteurs de $M$, $X_t \in \mathcal{X}(M)$, satisfaisant :

$$\frac{d}{dt}_{|_{s=t}} \phi_t = X_t \circ \phi_t.$$

**Définition 1.1.2.** *Soit $\{\phi_t\}_{t\in[0,1]}$ comme plus haut. Cette famille est une isotopie hamiltonienne si et seulement si $X_t$ est hamiltonien pour tout $t \in [0, 1]$.*

On définit alors $\mathrm{Ham}(M, \omega)$ de la façon suivante :

$$\mathrm{Ham}(M, \omega) := \{\phi \in \mathrm{Symp}(M, \omega) | \, \exists \{\phi_t\}_{t\in[0,1]}, \quad \phi_0 = id, \quad \phi_1 = \phi\},$$

où $\{\phi_t\}_{t\in[0,1]}$ est une isotopie hamiltonienne. On définit sur cet ensemble l'opération suivante : à deux éléments $\phi$ et $\psi$ de $\mathrm{Ham}(M, \omega)$ on attribue la composée $\phi\circ\psi$ telle que $(\phi \circ \psi)_t := \phi_t \circ \psi_t$. Cette isotopie entre $id$ et $\phi \circ \psi$ s'avère être hamiltonienne :

**Théorème 1.1.1.** *$Ham(M, \omega)$ est un groupe connexe par arc pour la loi de composition ci-dessus.*

## 1.2. Fibrations Hamiltoniennes et leur caractérisation

Les fibrations Hamiltoniennes forment une classe particulière de fibrations Symplectiques dont nous donnons à présent la définition.

**Définition 1.2.1.** *Une fibration symplectique $\pi : P \longrightarrow B$ de fibre $(F, \omega)$ est un fibré localement trivial dont le groupe de structure est contenu dans $Symp(F, \omega)$. Une fibration symplectique est hamiltonienne si son groupe de structure est dans $Ham(F, \omega)$.*

Nous dirons par la suite que $B$ est la base, $P$ l'espace total et $F$ la fibre de la fibration $\pi$.

**Remarque 1.2.1.** • *$\pi$ est une submersion.*

- *Etant donnée une fibration symplectique $\pi : P \longrightarrow B$, on peut définir pour chaque $b \in B$ une forme symplectique $\omega_b$ sur $F_b := \pi^{-1}(b)$ $(b \in B)$ induite par celle de $F$. En effet, considérons une trivialisation locale de $P$ contenant $b$.*

*Alors on définit $\omega_b$ comme étant le pull-back de $\omega$ via cette trivialisation. Le fait que par définition les fonctions de transition préservent $\omega$ implique que cette construction est indépendante du choix de carte trivialisante.*

- *Dans le langage homotopique, les fibrations symplectiques et hamiltoniennes sont classifiées via les espaces classifiants $BSymp(F,\omega)$ et $BHam(F,\omega)$ respectivement.*

**Exemple 1.2.1.** – *Toute fibration localement triviale en surface de Riemann est symplectique.*

– *Soit $\pi : E \longrightarrow \mathbb{C}P^n$ un fibré complexe unitaire de rang $r+1$, alors les fonctions de transition sont à valeurs dans le groupe de Lie $U(r+1)$. La projectivisation de ce fibré notée $\mathbb{P}(E)$ est dès lors une fibration en fibre $\mathbb{C}P^r$ et les fonctions de transitions sont à valeurs dans $PU(r+1)$, les matrices unitaires quotientées par les matrices scalaires. Si $\omega_{FS}$ désigne la forme de Kälher (compatible avec la structure complexe standard sur $\mathbb{C}P^r$) induisant la métrique de Fubini-Study, alors $\omega_{FS}$ est invariante sous l'action de $PU(r+1)$ impliquant par là même que $\mathbb{P}(E)$ est une fibration symplectique. De surcroît, comme $H_1(\mathbb{C}P^r;\mathbb{Z})=0$, le groupe projectif unitaire agit Hamiltoniennement. Nous obtenons donc une fibration Hamiltonienne.*

– *Soit la fibration de Hopf $S^1 \hookrightarrow S^3 \longrightarrow S^2$ de projection $\pi$. On forme la fibration*

$$\pi' : S^3 \times S^1 \longrightarrow S^2$$

*où $\pi'(u,\theta) := \pi(u)$. C'est une fibration en fibre $\mathbb{T}^2$. Donc par l'exemple précédent, cette fibration est symplectique. Cependant, elle ne possède pas de 2-forme symplectique compatible étant donné que $H^2_{DR}(S^3 \times S^1) = 0$.*

La caractérisation suivante des fibrations Hamiltoniennes est due à Guillemin, Lerman et Sternberg :

**Théorème 1.2.1.** *(Guillemin-Lerman-Sternberg) Soit $\pi : P \to (B,\omega_B)$ une fibration symplectique de fibre $(F,\omega)$. Alors, $\pi$ est hamiltonienne si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites :*

(i) *$\pi$ est symplectiquement triviale au-dessus du 1-squelette de $B$,*

(ii) *Il existe une extension fermée $\tau \in \Omega^2(P)$ de $\omega$ sur $P$, i.e si $i_b$ dénote le plongement de $F_b$ dans $P$, nous avons que $i_b^*\tau = \omega_b$ pour tout $b \in B$.*

La première condition provient du fait que $\mathsf{Ham}(F, \omega)$ est connexe par arc, de sorte que $B\mathrm{Ham}(F, \omega)$ est simplement connexe. La deuxième condition implique en particulier que toute fibration Hamiltonienne au dessus d'une base symplectique, disons $(B, \omega_B)$, peut être munie d'une structure de variété symplectique en posant :

$$\omega_{P,\kappa} := \tau + \kappa\pi^*\omega_B,$$

où $\kappa : B \longrightarrow \mathbb{R}^+$ est une fonction strictement positive, bornée, choisie de sorte que $\omega_{P,\kappa}$ soit non-dégénérée. Notons qu'il est possible de choisir $\kappa$ constante.

**Lemme 1.2.2.** *Soit $\pi : P \longrightarrow B$ une fibration Hamiltonienne de fibre $F$. Soit $\sigma_B \in H_2(B; \mathbb{Z})$, et soient $u_1, u_2 \in C^\infty(S^2, B)$ telles que $[u_1(S^2)] = [u_2(S^2)] = \sigma_B$. Alors les fibrés restreints $P|_{u_1}$ et $P|_{u_2}$ sont difféomorphes hamiltoniennement.*

**Preuve:** Tout d'abord, notons $f : B \longrightarrow B\mathrm{Ham}(F, \omega)$ une application classifiante de $P$, i.e $P = f^*E\mathrm{Ham}(F, \omega)$. Rappelons le fait général suivant de la théorie d'homotopie qui est que cette construction ne dépend que de la classe d'homotopie de $f$ à isomorphisme fibré près (ici un isomorphisme de fibré consiste en un difféomorphisme qui restreint à chaque fibre est donné par un élément de $\mathrm{Ham}(F, \omega)$).

Maintenant, si $B$ est simplement connexe, le théorème d'Hurewicz fournit un isomorphisme naturel entre $\pi_2(B)$, et $H_2(B; \mathbb{Z})$. Par conséquent, les applications $u_1$ et $u_2$ sont homotopes ce qui se traduit par l'existence d'une application continue :

$$G : S^2 \times [0, 1] \longrightarrow B,$$

telle que $G(z, 0) = u_1(z)$ et $G(z, 1) = u_2(z)$. Ainsi, $f \circ G$ définit une homotopie (Hamiltonienne) entre les applications classifiantes $f \circ u_1$ et $f \circ u_2$ associées respectivement aux fibrés (Hamiltoniens) $P|_{u_1}$ et $P|_{u_2}$. Par conséquent, cette homotopie induit un isomorphisme de fibrés Hamiltonien entre les deux fibrations mentionnées.

Le cas où $B$ n'est pas simplement connexe se traite en observant qu'une fibration Hamiltonienne au-dessus de $b$ peut toujours être obtenue comme pull-back d'une fibration hamiltonienne au-dessus de $B/B_1$, où $B_1$ désigne ici le 1-squelette de $B$. En effet, étant donné que $B\mathrm{Ham}(F,\omega)$ est simplement connexe, toute application classifiante $f : B \longrightarrow B\mathrm{Ham}(F,\omega)$ se factorise à homotopie près, par une application $f' : B/B_1 \longrightarrow B\mathrm{Ham}(F,\omega)$. Autrement dit, si on dénote par $\pi_{B_1}$ la projection de $B$ à $B/B_1$, nous avons $f \sim f' \circ \pi_{B_1}$ et donc ces deux applications classifient la même fibration hamiltonienne $P$. Pour terminer, soit $P' := (f')^* E\mathrm{Ham}(F,\omega)$ et considérons

$$u_1' := \pi_{B_1} \circ u_1, \quad u_2' := \pi_{B_1} \circ u_2.$$

Alors ces deux applications représentent la même classe d'homologie

$$\pi_{B_{1*}}(\sigma_B) \in H_2(B/B_1;\mathbb{Z}),$$

où $B/B_1$ est simplement connexe. Par conséquent, $u_1' \sim u_2'$ et nous obtenons :

$$P|_{u_1} \cong (u_1')^* P' \cong (u_2')^* P' \cong P|_{u_2},$$

où les isomorphismes sont entendus comme isomorphismes de fibrés hamiltoniens.

□

Il est possible de donner une interprétation plus géometrique de la condition ii) en terme de connexion symplectique. Nous allons nous attarder sur cette notion qui se révèlera importante pour la suite.

## 1.3. Connexions Hamiltoniennes et forme de couplage

D'abord, considérons le sous-fibré vertical de $Vert \subset TP$ sur $P$, dont la fibre au-dessus de $p \in P$ est donnée par le sous-espace :

$$Vert_p := \ker d\pi(p) = T_p F_{\pi(p)}.$$

Une connexion $\Gamma$ sur $P$ est une distribution lisse de $TP$ complémentaire à $Vert$. Plus précisément, si on désigne par $Hor$ cette distribution, nous avons que :

$$Hor : P \to Gr_{2n_B}(TP)\ ,\ p \mapsto Hor_p \subset T_pP,$$

est une application lisse telle que $Hor_p \oplus Vert_p = T_pP$ pour tout $p \in P$. Ainsi, si $X$ est un champ de vecteurs sur $P$, il se décompose uniquement en $X^h + X^v$, où

$X^h$ et $X^v$ dénotent respectivement la partie *horizontale* et *verticale* de $X$.
Une connexion définit un transport parallèle sur $P$ : si $\gamma : [0,1] \to B$ est un chemin lisse, il admet un unique relevé horizontal $\gamma^h : [0,1] \to P$ au choix près de point de départ pour $\gamma^h$. Dès lors, le transport parallèle désigne le difféomorphisme :

$$\psi_\gamma : F_{\gamma(0)} \to F_{\gamma(1)} \, , \, p = \gamma^h(0) \mapsto \psi_\gamma(p) = \gamma^h(1).$$

Lorsque $\gamma$ est un lacet dans $B$, le difféomorphisme $\psi_\gamma$ est appelé holonomie autour de $\gamma$.

**Définition 1.3.1.** *Une connexion $\Gamma_\tau$ est dite symplectique si l'holonomie le long de n'importe quel chemin $\gamma$ est un difféomorphisme symplectique. Elle est hamiltonienne si pour tout lacet $\gamma$ de $B$, l'holonomie de $\gamma$ est hamiltonienne.*

Soit $\tau \in \Omega^2(P)$ une extension fermée de $\omega$ quelconque. Une telle forme définit une connexion $\Gamma_\tau$ de distribution horizontale :

$$Hor_p := Vert_p^\tau = \{v \in T_pP \mid \tau(v,w) = 0 \ \ \forall w \in Vert_p\}.$$

**Remarque 1.3.1.** • *soient $\tau_0$ et $\tau_1$ deux extensions fermées. Elles définissent la même distribution horizontale si et seulement si le noyau de $\tau_0 - \tau_1$ contient $Vert$.*

- *Toute distribution de sous-espaces horizontaux $Hor \subset TP$ peut être représentée par une 2-forme $\tau$ compatible avec $\pi$ de sorte que $Hor = Vert^\tau$. Mais par la remarque précédente, $\tau$ n'est pas forcément unique.*

- *Dans ce contexte les conditions i) et ii) du théorème de caractérisation des fibrations hamiltoniennes se traduisent par le fait que toute fibration Hamiltonienne possède une connexion dont l'holonomie autour de n'importe quel lacet est Hamiltonienne* [9],[28].

Un choix canonique d'extension fermée représentant une connexion Hamiltonienne donnée $\Gamma$ peut être effectué en requérant que $\tau$ satisfasse :

$$\pi_* \tau^{n+1} = \int_F \tau^{n+1} = 0. \tag{1.3.1}$$

**Définition 1.3.2.** *Une extension fermée $\tau$ de $\omega$ satisfaisant la normalisation* (1.3.1) *est appelée* **forme de couplage** *associée à $\Gamma_\tau$.*

À la notion de transport parallèle est aussi associée celle de courbure d'une fibration.

**Définition 1.3.3.** *Soit $\Gamma$ une connexion sur $P$. Soient $v$ et $w$ deux champs de vecteurs sur $B$ et dénotons par $v^h$ et $w^h$ leurs relevés horizontaux relativement à $\Gamma$. Alors, la* **Courbure symplectique** *$R$ associée à $\Gamma$ est la 2-forme sur $B$ à valeurs dans $Vert$ définie par :*

$$R(v,w)(p) := [v^h, w^h]^v(p), \;\; p \in P.$$

**Exemple 1.3.1.** *Considérons $\pi : E \longrightarrow \mathbb{C}P^n$ un fibré complexe hermitien de rang $r$. Alors, comme nous l'avons vu au début, sa projectivisation $\mathbb{P}(E)$ est une fibration Hamiltonienne de fibre $(\mathbb{C}P^{r-1}, \omega_{FS})$. Une connexion Hermitienne $D$ sur $E$ induit une connexion Hamiltonienne sur $\mathbb{P}(E)$. En effet, la connexion $D$ induit un transport parallèle dont l'holonomie est dans $U(r)$, donnant ainsi une holonomie à valeur dans $PU(r)$, et donc Hamiltonienne, lorsque l'on se place dans la projectivisation. La courbure symplectique est alors donnée par la courbure de $D$.*

Pour une connexion $\Gamma$, il est possible de montrer que la valeur prise par la forme de couplage sur des paires de champs de vecteurs horizontaux est déterminée par la courbure symplectique de la connexion. Plus précisément, soit $\tau$ la forme de couplage associée à $\Gamma$, on peut montrer que pour tout $p \in P$, pour tout $v, w \in Hor_p$, $\tau_p(v,w)$ est donnée par :

$$-d(\tau_p(v,w)) := \iota(R(d\pi(p)v, d\pi(p)w)(p))\omega_{\pi(p)}(p).$$

Ceci vient du fait que l'holonomie de la connexion autour de n'importe quel lacet contractile est hamiltonienne. Par conséquent, en supposant, sans perte de généralité, que $v$ et $w$ représentent des relevés horizontaux de champs de vecteurs sur $B$, nous avons que pour tout $b := \pi(p) \in B$ il existe une fonction $H_b \in C^\infty(F_b, \mathbb{R})$ satisfaisant :

$$\iota([v,w]_p^{vert})\tau_p = dH_b.$$

Dès lors, $\tau$ est déterminée en choisissant que $H_b \in C_0^\infty(F_b, \mathbb{R})$ i.e l'ensemble des fonctions lisses sur $F_b$ de valeur moyenne nulle, autrement dit :

$$\int_{F_b} H_b \omega_b^n = 0.$$

Cette dernière égalité est équivalente à (1.3.1).

**Remarque 1.3.2.** *Par abus de notation nous écrirons $R(p)(v, w)$ à la place de $\tau(p)(v, w)$, où $v, w$ est ici une paire de vecteurs horizontaux.*

Plus tard nous serons amenés à considérer des familles de connexions induites par déformations exactes d'une forme de couplage $\tau$. Voici ce que nous entendons ici par déformation exacte. Soit $H$ une 1-forme sur $B$ à valeurs dans le fibré vectoriel au-dessus de $B$ de fibres $C_0^\infty(F_b)$. Autrement dit, pour chaque $b \in B$ nous avons une forme linéaire :

$$H_b : T_b B \to C_0^\infty(F_b),$$

et de surcroît $H_b$ dépend de façon lisse du point $b$. Un telle forme peut se relever en une forme sur $P$, dénotée $\widetilde{H}$ définie par :

$$\widetilde{H}_p : T_p P \to C_0^\infty(F_{\pi(p)}) \ , \ \widetilde{H}_p(X) := (\pi^* H)_p(X) = H_{\pi(p)}(\pi_{*_p}(X)),$$

où $p$ est un point de $P$.

Ces familles lisses de 1-formes sur $P$ peuvent être vues comme le pull-back via $\pi$ de sections lisses du fibré sur $B$ de fibre $T_b B^* \otimes C_0^\infty(F_b)$ au-dessus de $b$. On note par $\mathcal{H}$ l'ensemble de ces familles :

$$\mathcal{H} = C^\infty \left( P, \pi^* ( \bigsqcup_{b \in B} \{ T_b B^* \otimes C_0^\infty(F_b) \} ) \right).$$

**Définition 1.3.4.** *Soit $\tau$ une forme de couplage. Etant donné $\widetilde{H} \in \mathcal{H}$, on définit la déformation exacte de $\tau$ par $\widetilde{H}$ comme étant la 2-forme fermée sur $P$ donnée par*

$$\tau_{\widetilde{H}} := \tau - d\widetilde{H}.$$

Par définition, $\tau_H$ est une extension fermée de $\omega_F$, et on peut vérifier que sa distribution horizontale associée est donnée au point $p \in P$ par :

$$Hor_{\tau_H}(p) = \{ v - X_{\widetilde{H}_p(v)}(p) \mid v \in Hor_\tau(p) \},$$

où $X_{\widetilde{H}_p(v)}$ désigne ici (l'unique) champ de vecteurs hamiltonien sur $F_{\pi(p)}$ engendré par la fonction $\widetilde{H}_p(v)$. Notons qu'étant donné que nous travaillons avec des fonctions de valeur moyenne nulle, $\tau_H$ n'est autre que la forme de couplage associée à $Hor_{\tau_H}$. Aussi, observons que le procédé de déformation exacte altère la courbure symplectique. Nous désignerons par $R_H$ la nouvelle courbure.

Le lemme suivant sera utile plus tard :

**Lemme 1.3.1.** *Soient $p_1, \cdots, p_k$ des points distincts de $P$ tels que $\pi(p_j) \equiv b_0 \in B$ pour tout $j = 1, \cdots, k$, et soit $\mathcal{G} \subset T_bB$ un sous-espace deux dimensionnel fixé, de base $\{e_0, e_1 := J_B e_0\}$. Alors, pour tout k-uplet $(\xi_1, \cdots, \xi_k) \in Vert_{p_1} \times \cdots \times Vert_{p_k}$, il existe une fonction lisse $H : T_bB \longrightarrow C_0^\infty(F_b)$ telle que pour tout $j = 1, \cdots, k$ nous avons :*

$$X_{H(e_0)}(p_j) = \xi_j \quad \textit{et} \quad X_{H(J_B e_0)}(p_j) = -J_b(p_j)\xi_j.$$

**Preuve:** Soit $U_{b_0} \times F$ une trivialisation locale autour de $b \in B$. Dans cette carte, $H$ est de la forme :

$$H(b,z) = \sum_i H_i(b,z)dx_i,$$

où chaque $H_i(b,z)$ de valeur moyenne zéro et $x_i$ dénote des coordonnées dans $B$. Qui plus est, si on restreint cette forme au plan $\mathcal{G}$, $H(b,z)$ peut se réécrire sous la forme suivante

$$H(b,z) = H_0'(b,z)e_0^* + H_1'(b,z)e_1^*,$$

où $H_0'(b,z)$ et $H_1'(b,z)$ sont des combinaisons linéaires des $H_i(b,z)$ plus haut. Par conséquent, il reste à montrer que nous pouvons bien choisir $H_0'(b,z)$ et $H_1'(b,z)$ de sorte que :

$$X_{H_0'(b_0)}(p) = \xi \quad \text{et} \quad X_{H_1'(b_0)}(p) = -J_b(p)\xi.$$

Mais ceci est toujours réalisable localement, par transitivité du groupe $\mathrm{Ham}(F,\omega)$ sur $F$. Dès lors, en choisissant des fonctions lisses appropriées, $\beta_i$, $i = 0, 1$, à supports compacts dans $U_{b_0} \times F$, nous obtenons des fonctions définies globalement.

$\square$

## 1.4. Structures presque complexes compatibles

Commençons par la définition d'une structure (presque) complexe sur une variété $F$.

**Définition 1.4.1.** *Un structure presque complexe, $J$, sur une variété $F$ est une section de $\mathsf{End}(TF)$, le fibré des endomorphismes du tangent de $F$, telle que pour chaque $p \in F$ nous avons $(J(p))^2 = -id$.*

On dénotera par $\mathcal{J}(F)$ l'ensemble de ces structures presque complexes sur $F$.

**Remarque 1.4.1.** *Seules les variétés orientables de dimension paires peuvent admettre de telles structures.*

Lorsque $F$ possède une structure symplectique $\omega$, nous pouvons restreindre l'ensemble des structures complexes considérées en regardant seulement celles qui combinées avec la 2-forme $\omega$ donnent une métrique Hermitienne. Précisément :

**Définition 1.4.2.** *Soit $J \in \mathcal{J}(F)$. $J$ est dite* **compatible** *avec la forme symplectique $\omega$ si et seulement si*

- $\omega(X, JX) > 0$ *pour tout* $X \in \Gamma^{\infty}(TF)$,
- $\omega(J\cdot, J\cdot) = \omega(\cdot, \cdot)$.

*L'ensemble des structures presque complexes compatibles avec $\omega$ est dénoté par $\mathcal{J}(F, \omega)$ où plus simplement $\mathcal{J}_F$ lorsque aucune confusion n'est possible.*

Il s'avère que $\mathcal{J}(F, \omega)$ est un espace contractile et par conséquent non-vide. Maintenant, retournons au cas où $P$ est une fibration hamiltonienne au-dessus de $(B, \omega_B)$ de fibre $(F, \omega)$, et soit $\tau$ une forme de couplage sur $P$ comme dans la section précédente.

**Définition 1.4.3.** *Soit $J_B \in \mathcal{J}(B, \omega_B)$. Alors $J_P \in \mathcal{J}(P)$ est dite compatible avec $\pi$ et $\tau$, où simplement* **fibrée,** *si et seulement si :*

- $d\pi \circ J_P = J_B \circ d\pi$ *(i. $\pi$ est $J_P, J_B$-holomorphe),*
- $J_b := J_P|_{F_b} \in \mathcal{J}(F_b, \omega_b)$ *pour tout* $b \in B$,
- $J_P$ *préserve la distribution horizontale $\Gamma_\tau$ induite par $\tau$.*

*Nous dénoterons par $\mathcal{J}(P, \tau, \pi, \omega, \omega_B)$ l'ensemble de ces structures complexes. Encore une fois nous simplifierons la notation plus haut par $\mathcal{J}(P, \tau, \pi)$.*

Chaque structure complexe fibrée détermine, par définition, une famille $\{J_b\}_{b \in B}$ de structures presque complexes compatibles avec $\omega_b$.

**Définition 1.4.4.** *On dénotera par $\mathcal{J}^{Vert}(P, \pi, \omega)$ l'ensemble des structures presque complexes du sous-fibré $Vert$, qui sont $\omega_b$ compatible pour chaque fibre $F_b$. Lorsqu'aucune confusion ne sera possible nous dénoterons cet espace par $\mathcal{J}^{Vert}$.*

Dans les faits, nous avons que l'espace $\mathcal{J}(P, \tau, \pi)$ est paramétré par les paires $(J_B, J) \in \mathcal{J}(B, \omega_B) \times \mathcal{J}^{Vert}(P, \pi)$. Autrement dit :

**Lemme 1.4.1.** *Étant donnés $J \in \mathcal{J}^{Vert}(P, \pi)$, et $J_B \in \mathcal{J}(B, \omega_B)$, il existe une unique structure fibrée $J_P \in \mathcal{J}(P, \tau, \pi)$ qui étend $J$ et se projette sur $J_B$.*

**Preuve:** Afin de démontrer l'existence, nous n'avons qu'à définir $J_P$ sur la distribution horizontale. Ceci est fait de la façon suivante : pour chaque $X \in Hor$ et $p \in P$ posons

$$J_P(p)(X_p) := (J_B(\pi(p))(\pi_* X_p))^h_p.$$

Un calcul facile montre que $J_P^2 = -Id$ et que $\pi$ est $J_P, J_B$-holomorphe. Pour l'unicité, supposons que $J'_P$ soit une structure fibrée, distincte de $J_P$, qui étend $J$, alors nous pouvons conclure qu'il existe un champ de vecteur horizontal $X$ tel que $J'_P(X) \neq J_P(X)$. Mais ceci est impossible par la première condition de compatibilité dans la définition 1.4.3.

□

Notons que si on déforme la forme de couplage en utilisant $H \in \mathcal{H}$, l'unique extension de $J$ se projetant sur $J_B$ et qui préserve la distribution horizontale induite par $\tau_H$ est donnée (de façon univoque) en le point $p \in P$ par :

$$J_P^H(p)(v) = J_P(p)(v) + J(p) X_{H_{\pi(p)}(\pi_{*_p} v)} - X_{H_{\pi(p)}(J_B(\pi(p))\pi_{*_p} v)} \tag{1.4.1}$$

où $v \in T_pP$. Nous dénoterons par $\mathcal{P}(\pi, \tau, \omega, \omega_B)$, ou plus simplement $\mathcal{P}(\pi, \tau)$ ou encore $\mathcal{P}$, l'ensemble de ces structures fibrées où l'on s'autorise à faire varier la connexion symplectique (forme de couplage). Par le lemme précédent nous avons que :

**Lemme 1.4.2.** *L'espace $\mathcal{P}(\pi, \tau)$ est paramétré par le produit $\mathcal{J}_B \times \mathcal{J}^{Vert} \times \mathcal{H}$.*

Pour terminer, remarquons que les structures presque complexes $J_B$ et $J_P$, et la famille $J \in \mathcal{J}^{Vert}$, définissent respectivement des classes de cohomologie

$$c_1(TB, J_B) \in H^2(B;\mathbb{Z}), \quad c_1(TP, J_P) \in H^2(P;\mathbb{Z}), \quad c_1(Vert, J) \in H^2(P;\mathbb{Z}), \tag{1.4.2}$$

que l'on appelle **première classe de Chern**. Ces classes ne dépendent que de la classe d'homotopie des structures presque complexes, et par conséquent, étant donné que $\mathcal{J}_B$, $\mathcal{J}^{Vert}$ et $\mathcal{P}$ sont contractiles, ces classes ne dépendent pas des structures complexes et nous dénoterons ces classes $c_1^{TB}$, $c_1^{TP}$ et $c_1^{TP^v} \equiv c^v$ pour simplifier. La classe $c^v$ est appelée **classe de Chern verticale.**

## 1.5. Connexion affine particulière

Etant donnée une structure presque complexe fibrée $J_P^H = (J_B, J, H) \in \mathcal{P}$ sur $P$, on définit $g_{J_P^H}$, une métrique hermitienne sur $P$, comme étant le produit directe de la métrique hermitienne sur $B$ induite par $J_B$

$$g_{J_B} := \omega_B(., J_B.) \tag{1.5.1}$$

et de la famille de métriques hermitiennes sur $Vert$ induite par la famille $J$ :

$$g_J := \{g_{J_b}\}_b := \{\omega_b(., J_b.)\}_b. \tag{1.5.2}$$

Ainsi, relativement à la décomposition $TP = Vert \oplus Hor_{\tau_H}$, cette métrique est donnée par :

$$g_{J_P^H} := g_J \oplus \pi^* g_{J_B}. \tag{1.5.3}$$

Nous allons par la suite définir une connexion affine sur $TP$ qui étend la connexion de Levi-civita (L-C) verticale introduite dans le chapitre 8 de [**29**] et qui a la propriété de relever la connexion de L-C sur $TB$. Cette construction se révèlera utile afin de relier la linéarisation de l'opérateur de Cauchy-Riemann associée à $J_P^H$, à la linéarisation de l'opérateur de Cauchy-Riemann associée à $J_B$ (voir Chap.2). Sans perte de généralité nous supposerons dans ce qui suit que $H = 0$, à moins qu'il ne soit autrement spécifié.

### 1.5.1. La connexion de Levi-Civita verticale

C'est une connexion sur le sous-fibré $Vert$ induite à la fois par une famille de structures complexes verticales $J$ et le transport parallèle sur $P$ donné par la forme de couplage $\tau$.

**Définition 1.5.1.** La connexion de Levi-Civita verticale *est l'unique connexion sur* $Vert$*, dénotée par* $\nabla^v$*, qui satisfait les deux conditions suivantes :*

(1) $\nabla^v$ *restreinte à chaque fibre* $(F_b, \omega_b)$, $b \in B$, *est juste la connexion de Levi-Civita pour la métrique* $\omega_b(., J_b.)$.

(2) *Soit* $\gamma : \mathbb{R} \to B$ *un chemin lisse et notons par* $\psi_\gamma(t) : F_{\gamma(0)} \to F_{\gamma(t)}$ *le transport parallèle le long du relevé horizontal* $\gamma^h$ *de* $\gamma$. *Pour tout* $\xi \in Vert$ *on définit*

$$(\nabla^v_{\dot{\gamma}^h(0)}\xi)_p := \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}[d\psi_\gamma(-t)\xi_{\gamma^h(t)} - \xi_p],$$

*où le chemin* $\gamma^h(t)$ *est choisi de sorte que* $\gamma^h(0) = p$.

**Remarque 1.5.1.** • *Soient* $w \in Hor$ *et* $\xi \in Vert$ *alors nous avons :*

$$\nabla^v_w \xi = [w, \xi]^v.$$

• *Si on déforme la forme de couplage par une perturbation hamiltonienne* $H$ *(i.e on remplace* $\tau$ *par* $\tau - d\widetilde{H}$*) alors la connexion de Levi-Civita verticale* $\nabla^{H,v}$ *associée à* $H$, *est reliée à* $\nabla^v$ *de la façon suivante :*

$$\nabla^{H,v}_{\widetilde{w}}\xi = \nabla^v_{\widetilde{w}}\xi + \nabla^v_\xi X_{\widetilde{H}(\widetilde{w})},$$

*pour tout* $\widetilde{w} \in TP$ *et* $\xi \in Vert$. *Nous n'avons qu'à le vérifier pour* $\widetilde{w} \in Hor_H$ *étant donné que* $\nabla^{H,v}$ *et* $\nabla^v$ *coïncident sur* $Vert$. *En utilisant la première remarque et le fait que* $\widetilde{w} = w - X_{\widetilde{H}(\widetilde{w})}$ *pour* $w \in Hor$, *nous obtenons que :*

$$\begin{aligned}
\nabla^{H,v}_{\widetilde{w}}\xi &= [\widetilde{w}, \xi]^v = [w, \xi]^v + [\xi, X_{\widetilde{H}(\widetilde{w})}] \\
&= \nabla^v_w \xi + [\xi, X_{\widetilde{H}(\widetilde{w})}] \\
&= \nabla^v_{\widetilde{w}}\xi + \nabla^v_{X_{\widetilde{H}(\widetilde{w})}}\xi + [\xi, X_{\widetilde{H}(\widetilde{w})}] \\
&= \nabla^v_{\widetilde{w}}\xi + \nabla^v_\xi X_{\widetilde{H}(\widetilde{w})}.
\end{aligned}$$

Notons que cette connexion verticale ne préserve pas forcément la métrique "verticale" $g_J$ le long des directions horizontales, alors que la nouvelle connexion $\widetilde{\nabla}^v = \nabla^v - \frac{1}{2}J(\nabla^v J)$ oui ([29]).

### 1.5.2. Extension de $\nabla^v$

Dans ce qui suit nous construisons une connexion sur $TP$ qui va préserver la métrique hermitienne $g_{J_P}$ définie par (1.5.3). Comme expliqué plus tôt nous voulons définir une connexion $\nabla$ qui étend $\nabla^v$, de sorte qu'il ne nous reste plus qu'à spécifier $\nabla\xi$ pour $\xi \in Hor$.

D'abord, soient $w \in Vert$ et $\xi \in Hor$, alors pour tout $p \in P$ on pose :

$$(\nabla_w \xi)_p := [w, \xi]^h_p.$$

Maintenant, si $w$ et $\xi$ sont horizontaux nous voudrions pouvoir dire que $(\nabla_w \xi)_p$ est juste le relevé horizontal de $(\nabla^{TB}_{\pi_* w}\pi_*\xi)_{\pi(p)}$ en $p$, où $\nabla^{TB}$ dénote la connexion de Levi-Civita sur $TB$ associée à la métrique $\omega_B(., J_B.)$. Bien sûr, cette notation est complètement abusive. Néanmoins, nous pouvons lui donner un sens. Soit $\alpha_t$, $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ le flot de $w$ en $p$, i.e $\alpha_t(p)$ est l'unique courbe satisfaisant $\frac{d}{dt}\big|_{t=s} \alpha_t(p) = w_{\alpha_s(p)}$. Si $P^B_t(\pi_{*_p} w_p)$ désigne le transport parallèle le long de la courbe projetée $\pi \circ \alpha_t(p)$, on pose :

$$(\nabla_w \xi)_p := \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} (P^B_t(\pi_{*_p} w_p)\pi_{*_{\alpha_t(p)}}\xi)^h_p.$$

**Remarque 1.5.2.** *Si $\widetilde{w}$ et $\widetilde{\xi}$ sont deux champs de vecteurs sur $B$ qui étendent respectivement $\pi_{*_{\alpha_t(p)}} w$ et $\pi_{*_{\alpha_t(p)}}\xi$ alors $(\nabla_w \xi)_p$ est juste le relevé horizontal en $p$ de $(\nabla^{TB}_{\widetilde{w}}\widetilde{\xi})_{\pi(p)}$.*

**Lemme 1.5.1.** *$\nabla$ définie plus haut est une connexion sur $TP$ qui étend $\nabla^v$ et dont la torsion est donnée par :*

$$T(X, Y) = -R(X, Y) = -[X^h, Y^h]^v \tag{1.5.4}$$

*pour tout $X, Y \in \mathcal{X}(TP)$.*

**Preuve:** $\nabla$ étend $\nabla^v$ par construction. Il reste donc à montrer que pour $f \in C^\infty(P)$ et $\xi \in Hor$ les deux conditions suivantes sont satisfaites étant donné

$w \in TP$ quelconque :

$$\nabla_w f\xi = (w(f))(\xi) + f\nabla_w \xi \ , \ \nabla_{fw}\xi = f\nabla_w \xi,$$

étant donné que la $\mathbb{R}$-linéarité est déjà satisfaite par linéarité du crochet de Lie $[.,.]$ ainsi que du transport parallèle sur $TB$.

Pour commencer, supposons que $w$ est vertical. Alors, par définition $\nabla_w f\xi = [w, f\xi]^h = f[w,\xi]^h + w(f)\xi$ ce que nous désirions. De façon analogue, nous avons que $[fw,\xi] = f[w,\xi] - \xi(f)w$, ce qui implique que $[fw,\xi]^h = f[w,\xi]^h$ étant donné que $w$ est vertical. Maintenant, supposons que $w$ est horizontal :

$$\begin{aligned}
(\nabla_w f\xi)_p &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (P_t^B(\pi_{*_p}w_p)\pi_{*_{\alpha_t(p)}} f\xi)_p^h \\
&= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (P_t^B(\pi_{*_p}w_p) f(\alpha_t(p))\pi_{*_{\alpha_t(p)}}\xi)_p^h \\
&= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (f(\alpha_t(p))P_t^B(\pi_{*_p}w_p)\pi_{*_{\alpha_t(p)}}\xi)_p^h \\
&= (w(f))(p)\xi + f(p)\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (P_t^B(\pi_{*_p}w_p)\pi_{*_{\alpha_t(p)}}\xi)_p^h \\
&= df(p)w\xi + f(p)(\nabla_w\xi)_p,
\end{aligned}$$

où la troisième égalité est donnée par linéarité du transport parallèle sur $TB$ et la quatrième est juste la différentiation d'un produit. Nous obtenons de la même manière que $\nabla_{fw}\xi = f\nabla_w\xi$.

Afin de prouver la dernière affirmation, rappelons que la torsion d'une connexion est définie par $T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$. Posons $X = X^h + X^v$ et $Y = Y^h + Y^v$. Nous avons par définition que :

$$\begin{aligned}
\nabla_X Y &= \nabla_{X^h}Y^h + \nabla_{X^h}Y^v + \nabla_{X^v}Y^h + \nabla_{X^v}Y^v \\
&= (\nabla^{TB}_{\pi_* X^h}\pi_* Y^h)^h + [X^h, Y^v]^v + [X^v, Y^h]^h + \nabla^v_{X^v}Y^v
\end{aligned}$$

de sorte que :

$$\begin{aligned}
T(X,Y) &= (T_B^{LC}(\pi_* X, \pi_* Y))^h + T_F^{LC}(X^v, Y^v) + [X^h, Y^v]^v + [X^v, Y^h]^h \\
&\quad -[Y^h, X^v]^v - [Y^v, X^h]^h - [X^h, Y^h]^v - [X^h, Y^v] - [X^v, Y^h] \\
&= -[X^h, Y^h]^v = -R(X,Y).
\end{aligned}$$

Ici la dernière égalité est obtenue car les connexions de Levi-Civita sont par définition sans torsion, nous permettant d'annuler les deux premiers termes du membre de droite de l'équation.

□

Voici une autre propriété de la connexion $\nabla$.

**Lemme 1.5.2.** *Pour tout $w, \xi_1, \xi_2 \in \Gamma(TP)$ nous avons que :*

$$(\nabla_w g)(\xi_1, \xi_2) = (\nabla_{w^h} g)(\xi_1^v, \xi_2^v).$$

*En particulier, la connexion $\widetilde{\nabla} := \nabla - \frac{1}{2} J_P(\nabla J_P)$ qui préserve $J_P$, préserve aussi la métrique $g_{J_P}$.*

**Preuve:** Rappelons que pour tout $w, \xi_1, \xi_2$ dans $TP$ nous avons :

$$(\nabla_w g_{J_P})(\xi_1, \xi_2) = w.g_{J_P}(\xi_1, \xi_2) - g_{J_P}(\nabla_w \xi_1, \xi_2) - g_{J_P}(\xi_1, \nabla_w \xi_2). \qquad (1.5.5)$$

Dès lors, la première affirmation du lemme est due aux observations suivantes :

- $(\nabla_{w^v} g_{J_P})(\xi_1^v, \xi_2^v) = 0$ car $\nabla$ se restreint à la connexion de Levi-Civita verticale sur $Vert$. Par analogie, $(\nabla_{w^h} g_{J_P})(\xi_1^h, \xi_2^h) = 0$ car dans ce cas $\nabla_{w^h} \xi_i^h := \nabla^{TB}_{\pi_* w^h} \pi_* \xi_i^h$, pour $i = 1, 2$, où $\nabla^{TB}$ et la connexion de Levi-Civita pour la base.
- $(\nabla_{w^v} g_{J_P})(\xi_1^h, \xi_2^h)$ doit s'annuler étant donné que la métrique $g_{J_P}$ restreinte à $Hor$ est définie par le pull-back de $g_{J_B}$ et par là même est constante le long de chemins verticaux.
- Les cas faisant intervenir la partie verticale de l'un des $\xi_i$ avec la partie horizontale d'un $\xi_i$ différent sont traités de façon similaire. Le fait que la métrique $g_{J_P}$ et la connexion $\nabla$ respectent la décomposition de $TP$ en parties horizontales et verticales est la raison pour laquelle ces termes s'annulent. Faisons le calcul explicite dans le cas où nous avons $w^v$, $\xi_1^v$ et $\xi_2^h$ : le premier terme de l'équation (1.5.5) s'annule de façon évidente, le second le troisième termes disparaissent parce que $\nabla_{w^v} \xi_1^v \in Vert$ et $\nabla_{w^v} \xi_2^h \in Hor$.

La deuxième affirmation est donnée par le lemme 8.3.6 de [29]. Dans ce lemme, McDuff et Salamon montrent que la connexion $\nabla^v - 1/2 J \nabla^v J$ est Hermitienne pour la métrique $g_J$, ce qui termine la démonstration.

□

Nous allons terminer ce chapitre en détaillant un peu plus le cas des fibrations Hamiltoniennes au-dessus de $S^2$.

## 1.6. Le cas où $B$ est la 2-sphère

Il existe une correspondance entre les lacets dans $\mathrm{Symp}(F,\omega)$ et les fibrations symplectiques de fibre $(F,\omega)$. La correspondance est donnée comme suit. Soit un lacet symplectique $\phi_{t\in[0,1]}$ dans $\mathrm{Symp}_0(F,\omega)$, on lui associe le fibré $P_\phi$ sur $S^2$, de fibre $(F,\omega)$, défini par :

$$P_\phi := \frac{D_2^+ \times F \sqcup D_2^- \times F}{(e^{2\pi it},x) \sim (e^{2\pi it},\phi_t(x))}$$

où $D_2^+$ est le disque unité fermé et orienté du plan et $D_2^-$ est aussi le disque unité mais avec l'orientation inverse. Cette construction revient à coller ensemble les copies $D_2^+ \times F$ et $D_2^- \times F$ en les identifiant le long de leur frontière via le lacet $\phi_t$. Par construction $P_\phi$ est un fibré localement trivial de fibre $F$ dont le groupe de structure se trouve dans $\mathrm{Symp}_0(F,\omega)$ (car $\phi_t \in \mathrm{Symp}_0(F,\omega)$). Il s'avère que cette correspondance est inversible dans le sens où, étant donnée une fibration symplectique sur la 2-sphère orientée avec l'identification d'une des fibres avec $F$, on peut reconstruire la classe d'homotopie de $\phi$.

**Remarque 1.6.1.** *Une conséquence évidente de cette correspondance est que le fibré $P_\phi$ est hamiltonien si et seulement si $\phi_t$ est un lacet dans $Ham(F,\omega)$.*

Étant donnés deux lacets hamiltoniens, on peut se demander comment se réalise le fibré associé au lacet produit.

**Lemme 1.6.1.** *Soient $\phi$ et $\psi$ deux lacets hamiltoniens de $F$ et soit $\phi\circ\psi$ leur produit. Alors $P_{\phi\circ\psi}$ est une fibration hamiltonienne réalisée par la somme fibrée $P_\phi \# P_\psi$.*

$P_\phi \# P_\psi$ est défini comme suit. Soit $F_{\phi,0}$ la fibre au-dessus de $0 \in D_2^+$ dans $P_\phi$ et soit $F_{\psi,\infty}$ la fibre au-dessus de $0 \in D_2^-$ dans $P_\psi$. Soit $V_\phi$ un voisinage ouvert produit de $F_{\phi,0}$ i.e $V_\phi = V \times F$ où $V$ est un voisinage ouvert de 0 dans $D_2^+$. On définit de façon analogue $V_\psi$ un voisinage ouvert produit de $F_{\psi,\infty}$. Considérons les espaces $P_\phi \setminus V_\phi$ et $P_\psi \setminus V_\psi$. On peut identifier $P_\phi \setminus V_\phi$ à

$$D_2^+ \times F \cup_{\alpha(\phi,1)} S^1 \times [0,1] \times F,$$

où $\alpha_{\phi,1}(2\pi t, x) = (2\pi t, 1, \phi_t(x))$. De même $P_\psi \setminus V_\psi$ est identifié à

$$S^1 \times [-1,0] \times F \cup_{\alpha(\psi,-1)} D_2^- \times F,$$

où $\alpha_{\psi,-1}(2\pi t, -1, x) = (2\pi t, \psi_t(x))$. La somme fibrée est donnée en collant ces deux espaces trivialement le long de leur frontière :

$$P_\phi \# P_\psi \quad := \quad D_2^+ \times F \cup_{\alpha(\phi,1)} S^1 \times [-1,1] \times F \cup_{\alpha(\psi,-1)} D_2^- \times F.$$

L'identification entre $P_{\phi\circ\psi}$ et $P_\phi \# P_\psi$ est donnée via la rétraction de $S^1 \times [-1,1]$ sur $S^1$.

**Remarque 1.6.2.** • *$P_{id} = S^2 \times F$.*

- *En désignant par $\sim$ la relation d'équivalence sur l'ensemble des fibrés Hamiltoniens au-dessus de $S^2$ qui est donnée par les isomorphismes de fibrés dans la catégorie Hamiltonienne, nous pouvons conclure d'après ce qui a été dit que :*

  $$\pi_1(Ham(F,\omega)) \cong \Big\{ \textit{fibrations Hamiltoniennes sur } S^2 \textit{ de fibre } (F,\omega) \Big\} / \sim,$$

  *en tant que groupes ; la structure de groupe du membre de droite étant donnée par la somme connexe fibrée.*

- *Si $\phi$ est un lacet hamiltonien, on peut associer à $P_\phi$ la forme de couplage $\tau_\phi$. Cette forme étant fermée, elle définit un élément de $H^2_{DR}(P_\phi)$. Une autre classe importante pour la suite est la première classe de Chern associée à l'espace tangent vertical de $P_\phi$ :*

  $$c_1(TP_\phi^{vert}) := c_\phi \in H^2(P; \mathbb{Z}).$$

  *On peut voir que ces classes se comportent bien sous composition des lacets* [20].

Nous serons particulièrement intéressés par les classes d'homologie de $P_\phi$ représentant possiblement des sections.

**Définition 1.6.1.** *On dira que $\sigma \in H_2(P_\phi; \mathbb{Z})$ est une* **classe de section** *si elle satisfait la condition $\pi_*(\sigma) = [S^2]$.*

On peut voir aisément, en utilisant la suite exacte en homotopie induite par les fibrations, que n'importe quelles deux classes de section non-homologues, diffèrent par un élément sphérique $B \in H_2(F;\mathbb{Z})$. Nous allons rassembler ces classes de section dont la différence donne un élément qui est envoyé sur 0 sous les évaluations de $\tau_\phi$ et $c_\phi$.

**Définition 1.6.2.** *On dit que deux classes de section $\sigma$ et $\sigma'$ sont équivalentes si et seulement si*

$$\tau_\phi(\sigma - \sigma') = c_\phi(\sigma - \sigma') = 0. \tag{1.6.1}$$

De fait, la même relation d'équivalence peut être définie dans le cadre plus général où $\pi : P \longrightarrow B$ est une fibration Hamiltonienne au-dessus d'une base quelconque, avec forme de couplage $\tau$. En effet, soit $\sigma_B \in H_2(B;\mathbb{Z})$ une classe sphérique de $B$, et considérons l'ensemble :

$$\pi_*^{-1}(\sigma_B) = \{\sigma \in H_2^S(P;\mathbb{Z}) \mid \pi_*(\sigma) = \sigma_B\}.$$

**Définition 1.6.3.** *Soient $\sigma_1, \sigma_2 \in \pi_*^{-1}(\sigma_B)$. On dira que $\sigma_1$ est équivalent à $\sigma_2$, dénoté par $\sigma_1 \sim_{\sigma_B} \sigma_2$, si et seulement si*

$$\tau(\sigma_1 - \sigma_2) = 0 = c^v(\sigma_1 - \sigma_2).$$

*Une telle classe d'équivalence sera désignée par $[\sigma]_{\sigma_B}$.*

À présent, supposons que la classe $\sigma_B$ est représentée par une sphère lisse d'image $C$. Alors la restriction $P|_C$ est une fibration Hamiltonienne au-dessus de $C$ avec classe de Chern verticale et forme de couplage données respectivement par les pull-backs via l'inclusion, $\iota^P_{P|_C} : P|_C \longrightarrow P$, de $c^v$ et $\tau$. Remarquons que $P|_C$ peut être vu comme une fibration Hamiltonienne au-dessus de $S^2$ en considérant le pull-back de $P$ par l'application de domaine $S^2$ et d'image $C$. Maintenant, considérons la classe d'équivalence $[\sigma]_{\sigma_B}$. Tout élément de $\pi_*^{-1}(\sigma_B)$ définit une classe de section de $P|_C$ tout simplement en considérant le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
P|_C \arrow[r, "\iota^P_{P|_C}"] \arrow[d, "\pi"'] & P \arrow[d, "\pi"] \\
C \arrow[r, "\iota_C"] & B
\end{tikzcd}$$

Nous pouvons dès lors, sans ambiguïté, considérer l'ensemble $(\iota^P_{P|_C})^{-1}([\sigma]_{\sigma_B})$. Nous avons :

**Lemme 1.6.2.** *L'ensemble* $(\iota^P_{P|_C})^{-1}([\sigma]_{\sigma_B})$ *est une classe d'équivalence de sections de* $P|_C$.

**Preuve:** On montre d'abord, que n'importe quels deux éléments de $(\iota^P_{P|_C})^{-1}([\sigma]_{\sigma_B})$ sont équivalents. Soient $\sigma_1, \sigma_2 \in (\iota^P_{P|_C})^{-1}([\sigma]_{\sigma_B})$, alors par définition :

$$\tau|_{P|_C}(\sigma_1 - \sigma_2) = \tau(\iota^P_{P|_C}(\sigma_1 - \sigma_2)) = 0 = c^v(\iota^P_{P|_C}(\sigma_1 - \sigma_2)) = \iota^{P*}_{P|_C} c^v(\sigma_1 - \sigma_2),$$

étant donné que

$$\iota^P_{P|_C}(\sigma_1) \sim_{\sigma_B} \iota^P_{P|_C}(\sigma_2).$$

Nous montrons à présent que deux classes de section de $P|_C$ équivalentes, sont envoyées sur la même classe d'équivalence dans $P$ sous l'application $\iota^P_{P|_C}$. Mais comme $\sigma_1 \sim \sigma_2$ :

$$0 = \tau_{P|_C}(\sigma_1 - \sigma_2) = \tau(\iota^P_{P|_C}(\sigma_1) - \iota^P_{P|_C}(\sigma_2)),$$

et il en va de même pour les classes de Chern.

$\square$

# Chapitre 2

## APPLICATIONS PSEUDO-HOLOMORPHES DANS LES FIBRATIONS HAMILTONIENNES

L'objet de ce chapitre est l'étude de la structure de l'espace de modules des applications holomorphes paramétrées dans l'espace total d'une fibration Hamiltonienne. Les résultats présentés généralisent ceux donnés au chapitre 8 de [**29**], dans lequel les auteurs se restreignent aux fibrations Hamiltoniennes au-dessus de surfaces de Riemann. Par le choix de structures presque complexes fibrées, cet espace se projette via $\pi$ sur l'espace de modules des applications holomorphes correspondantes dans la base. Ces espaces correspondent en réalité à des ensembles de zéros de sections Fredholm de certains fibrés de Banach au-dessus de variétés de Banach, qui se projettent l'un sur l'autre via $\pi$. Si en particulier ces sections sont transverses aux sections nulles correspondantes, il est possible de donner aux intersections une structure de variété qui est de surcroît naturellement orientée. Nous montrons en l'occurrence, par des techniques standards, que cette 'double' transversalité est réalisée pour un choix générique de structures complexes fibrées à partir du moment où l'on se restreint aux applications holomorphes simples dans $P$ qui se projettent sur des applications holomorphes simples dans $B$, ce qui dans le cas où la base est $S^2$ revient à considérer les applications représentant des classes de sections.

Notons que bien que le résultat de transversalité que nous donnons dans ce chapitre soit donné pour des applications de genre 0 uniquement, sa généralisation aux genres supérieurs en est toutefois directe. De surcroît, nous aurions très bien pu considérer des structures complexes fibrées dont la projection ne fait que maîtriser $\omega_B$ ($\omega_B$-tame), et dont la restriction aux sous-fibré vertical donne une famille de structures presque complexes maîtrisant $\omega$.

## 2.1. Applications pseudo-holomorphes et problème de Fredholm associé

Nous commençons par donner la définition d'une courbe (pseudo)-holomorphe dans une variété $F$ munie d'une structure presque complexe $J$. Rappelons qu'une surface de Riemann de genre $g$ est une paire $(\Sigma, j)$ où $\Sigma$ est une surface lisse de genre $g$ et $j$ est une structure conforme sur $\Sigma$.

**Exemple 2.1.1.** $S^2 := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ *est une surface de Riemann de genre 0 qui possède une unique classe de structure conforme, notée* $j_0$*, induite par la mutiplication par i. Ici, unique signifie à biholomorphisme près, qui dans ce cas sont donnés par* $G := PSL_2(\mathbb{C})$ *le groupe des fractions rationnelles.*

**Définition 2.1.1.** *Soit* $(\Sigma, j)$ *une surface de Riemann de genre g et soit* $(F, J)$ *une variété presque complexe. Une application* $u \in C^\infty(\Sigma, F)$ *est dite* $j, J$*-pseudo holomorphe ssi elle satisfait en tout point* $x \in F$ *:*

$$du(x) \circ j = J(x) \circ du(x). \tag{2.1.1}$$

Par abus nous dirons aussi que $u$ est une courbe $j, J$-holomorphe de genre $g$. Dans le reste de la thèse nous ne nous intéresserons qu'au cas des courbes de genre 0 à moins que le contraire ne soit spécifié et nous oublierons donc de mentionner la structure complexe.

Soit $J_P^H = (J_B, J, H)$ une structure holomorphe fibrée relativement à la forme de couplage $\tau_H$. L'ensemble des applications $J_P^H$-holomorphes peut être vu comme l'ensemble des zéros de l'opérateur différentiel de Cauchy-Riemann :

$$\overline{\partial}_{J_P^H} = \frac{1}{2}(d + J_P^H \circ d \circ j).$$

Cet opérateur a pour domaine

$$\mathcal{B}_P := C^\infty(S^2, P),$$

et peut être vu comme une section du fibré vectoriel infini-dimensionnel au-dessus de $\mathcal{B}_P$ :

$$\mathcal{E}_P(J_P^H) := \bigsqcup_{u \in \mathcal{B}_P} C^\infty(\Lambda^{0,1}_{J_P^H}(S^2, u^*TP)).$$

La fibre au-dessus de $u$ correspond à :

$$\mathcal{E}_{P,u}(J_P^H) = C^\infty(\Lambda^{0,1}_{J_P^H}(S^2, u^*TP)).$$

La préimage de 0 par $\overline{\partial}_{J_P^H}$ nous donne l'ensemble des sphères $J_P^H$-holomorphes dans $P$. Afin d'obtenir un certain contrôle sur cet espace nous nous restreignons aux courbes holomorphes représentant une classe d'homologie sphérique donnée $\sigma \in H_2(P, \mathbb{Z})$. Posons

$$\mathcal{M}(P, \sigma; J, J_B, H) \equiv \mathcal{M}(P, \sigma; J_P^H) := \left\{ u \in \overline{\partial}_{J_P^H}^{-1}(0) \mid [u(S^2)] = \sigma \right\}. \tag{2.1.2}$$

Cet espace est appelé **espace de modules** des courbes $J_P^H$-holomorphes représentant $\sigma$. En posant :

$$\mathcal{B}_P(\sigma) := \left\{ u \in \mathcal{B}_P | [u(S^2)] = \sigma \right\}, \quad \mathcal{E}_P(\sigma, J_P^H) := \mathcal{E}_P(J_P^H)\big|_{\mathcal{B}_P(\sigma)}$$

nous avons que $\mathcal{M}(P, \sigma; J_P^H)$ est la préimage de 0 par $\overline{\partial}_{J_P^H}$ restreinte à $\mathcal{B}_P(\sigma)$.

De façon similaire, nous avons un opérateur de Cauchy-Riemann, $\overline{\partial}_{J_B}$, associé à la structure presque complexe $J_B$. On définit comme dans le paragraphe précédent les espaces :

$$\mathcal{B}_B,\ \mathcal{B}_B(\sigma_B),\ \mathcal{E}_B(J_B),\ \mathcal{E}_{B,u}(J_B),\ \text{et}\ \ \mathcal{E}_B(\sigma_B, J_B),$$

où $\sigma_B \in H_2(B; \mathbb{Z})$ est une classe sphérique de $B$. Nous obtenons l'espace de modules associé à l'opérateur $\overline{\partial}_{J_B}$ et à la classe $\sigma_B$ :

$$\mathcal{M}(B, \sigma_B, J_B) := \left\{ u \in \overline{\partial}_{J_B}^{-1}(0) | [u(S^2)] = \sigma_B \right\}.$$

Nous observons que le choix de structure complexe fibrée sur $P$ implique que la projection $\pi$ induit naturellement une application entre les espaces de modules :

$$\mathcal{F}_\pi : \mathcal{M}(P, \sigma; J, J_B, H) \longrightarrow \mathcal{M}(B, \sigma_B; J_B), \quad u \mapsto \pi(u). \tag{2.1.3}$$

En effet, $\pi$ est par définition $J_P^H, J_B$-holomorphe et nous avons donc :

$$\pi_* \circ \overline{\partial}_{J_P^H} = \overline{\partial}_{J_B} \circ \pi.$$

Le lemme suivant montre comment une déformation Hamiltonienne d'une structure fibrée $J_P$ induit une déformation des solutions de l'opérateur $\overline{\partial}_{J_P}$ :

**Lemme 2.1.1.**

$$\overline{\partial}_{J_P^H} u = 0 \iff \overline{\partial}_{J_P} u + X^{0,1}_{H(du)} = 0.$$

**Preuve:** Soit $u \in \mathcal{M}(P, \sigma; J_P^H)$, alors $u_B := \pi(u)$ est $J_B$-holomorphe. Ainsi, en gardant en tête que $\overline{\partial}_{J_P^H} u = 0$, nous avons :

$$\begin{aligned}
\overline{\partial}_{J_P^H} u &= \frac{1}{2}(du + J_P^H du \circ j) \\
&= \frac{1}{2}(du + J_P du \circ j) + \frac{1}{2}(JX_{H(du_B \circ j)} - X_{H(J_B du_B \circ j)}) \\
&= \overline{\partial}_{J_P} u + \frac{1}{2}(JX_{H(du_B \circ j)} - X_{H(-du_B)}) \\
&= \overline{\partial}_{J_P} u + X^{0,1}_{H(du)},
\end{aligned}$$

ce qui termine la preuve.

□

Autrement dit, l'espace de modules $\mathcal{M}(P, \sigma; J_P^H)$ est donné par l'intersection de la section nulle de $\mathcal{E}_P(\sigma, J_P^H)$ avec la section $\overline{\partial}_{J_P} + X^{0,1}_{\tilde{H}}$. Dans le meilleur cas possible, l'intersection est transverse en tout point $u \in \mathcal{M}(P, \sigma; J_P^H)$. La transversalité en question est réalisée dès que le conoyau de la linéarisation $D_u^H$ en $u$ de $\overline{\partial}_{J_P} + X^{0,1}_{\tilde{H}}$ s'annule pour tout $u$. Nous allons à présent dériver $D_u^H$. Nous supposerons, sans perte de généralité, que $H = 0$.

Soit $\mathcal{X}_{P,u}$ l'espace tangent en $u$ de $\mathcal{B}_P$. Par définition nous avons :

$$\mathcal{X}_{P,u} := C^\infty(S^2, u^* TP).$$

L'opérateur linéarisé est l'opérateur

$$D_u : \mathcal{X}_{P,u} \longrightarrow \mathcal{E}_{P,u}(J_P), \tag{2.1.4}$$

défini comme la différentielle de $\overline{\partial}_{J_P}$ en $u$ composée avec la projection sur l'espace vertical (la fibre) en $u$ : $\mathcal{E}_{P,u}(J_P)$. Pour que cette projection verticale ait un sens en dehors de la section nulle, nous avons besoin d'une connexion hermitienne sur le fibré vectoriel $\mathcal{E}_P(J_P)$, afin d'assurer que le transport parallèle induit, respecte la structure holomorphe sur les fibres. Cette dernière connexion sera induite par la connexion $\nabla$ définie lors du chapitre précédent, comme le montre le lemme suivant.

**Lemme 2.1.2.** *Soient $u \in \mathcal{B}_P$ et $\xi \in (\mathcal{X}_P)_u$. Alors la linéarisation en $u$ de l'opérateur $\overline{\partial}_{J_P}$ est donnée par :*

$$D_u\xi = \nabla^{0,1}\xi - \frac{1}{2}J_P(u)(\nabla_\xi J_P)(\partial_{J_P}u) + R^{0,1}(du, \xi),$$

*où $\nabla^{0,1}\xi$ et $R^{0,1}(du^h, \xi^h)$ représentent respectivement les opérateurs $J_P$ anti-linéaires*

$$\frac{1}{2}(\nabla_{du}\xi + J_P(u) \circ \nabla_{du\circ j}\xi) \;\; et \;\; \frac{1}{2}(R(du, \xi) + J \circ R(du \circ j, \xi)).$$

**Preuve:** Considérons la connexion sur $TP$ définie par

$$\widetilde{\nabla}_X Y := \nabla_X Y - \frac{1}{2}J_P(\nabla_X J_P)Y$$

pour tout champs de vecteurs $X$ et $Y$ sur $P$. Cette connexion préserve $J_P$, et nous avons :

$$\begin{aligned}
D_u\xi &= \widetilde{\nabla}_\xi \overline{\partial}_{J_P}(u) \\
&= \frac{1}{2}\widetilde{\nabla}_\xi(du + J_P(u)du \circ j) \\
&= \frac{1}{2}(\widetilde{\nabla}_\xi du + J_P(u)\widetilde{\nabla}_\xi du \circ j) \\
&= \frac{1}{2}(\nabla_\xi du + J_P(u)\nabla_\xi du \circ j) - \frac{1}{4}(J_P(u)(\nabla_\xi J_P(u))du - (\nabla_\xi J_P(u))du \circ j) \\
&= \frac{1}{2}(\nabla_{du}\xi - R(\xi, du) + J_P(u)\nabla_{du\circ j}\xi - J_P(u)R(\xi, du \circ j)) \\
&\quad -\frac{1}{2}J_P(u)(\nabla_\xi J_P)\partial_{J_P}(u) \\
&= \nabla^{0,1}\xi - \frac{1}{2}J_P(u)(\nabla_\xi J_P)(\partial_{J_P}u) + R^{0,1}(du, \xi).
\end{aligned}$$

L'avant dernière égalité est une conséquence du lemme 1.5.1.

□

**Remarque 2.1.1.** • *Lorsque $\xi$ est à valeurs verticales, le terme impliquant la courbure disparait et on retrouve l'opérateur linéarisé vertical de McDuff et Salamon ([29], chapitre 8). Par la suite, nous désignerons par $D^{v,H}$ la restriction de $D^H$ aux champs de vecteurs sur $S^2$ à valeurs dans le sous-fibré $Vert$.*

- *Si $H \neq 0$ nous obtenons l'expression suivante*

$$\begin{array}{rcl} D_u^H : (\mathcal{X}_P)_u & \longrightarrow & \mathcal{E}_{P,u}(J_P^H) \\ \xi & \mapsto & (\nabla^H)^{0,1}\xi - \frac{1}{2}J_P^H(u)(\nabla_\xi^H J_P^H)(\partial_{J_P^H} u) + (R^H)^{0,1}(du,\xi). \end{array}$$

*Bien que l'accent ait seulement été mis sur la dépendance de $D_u^H$ par rapport au paramètre $H$, nous rappelons ici que cet opérateur dépend tout autant des structures complexes $J_B$ et $J$.*

- *De façon tout à fait analogue à la preuve 2.1, nous avons l'expression suivante pour l'opérateur linéarisé $D_u^B$ de $\overline{\partial}_{J_B}$ en $u \in \mathcal{B}_B$ :*

$$D_u^B : \mathcal{X}_{B,u} \longrightarrow \mathcal{E}_{B,u}(J_B), \;\; D_u^B\xi = (\nabla^{TB})^{0,1}\xi - \frac{1}{2}J_B(u)(\nabla_\xi^{TB} J_B)(\partial_{J_B} u), \quad (2.1.5)$$

*où $\nabla^{TB}$ est, nous le rappelons, la connexion de Levi-Civita associée à $g_{J_B}$, et*

$$\mathcal{X}_{B,u} := C^\infty(S^2, u^*TB) = T_u\mathcal{B}_B.$$

Nous allons voir dans la section suivante, comment l'application $\mathcal{F}_\pi$ relie les linéarisations de $\overline{\partial}_{J_P^H}$ et $\overline{\partial}_{J_B}$. En fait nous allons voir que cette application induit une submersion entre les systèmes Fredholm $(\mathcal{B}_P(\sigma), \mathcal{E}_P(\sigma, J_P^H), \overline{\partial}_{J_P^H})$ et $(\mathcal{B}_B(\pi_*\sigma), \mathcal{E}_B(\pi_*\sigma, J_B), \overline{\partial}_{J_B})$.

## 2.2. Systèmes Fredholm et scindement

On commence ici par une petite disgression sur la définition de scindement de systèmes Fredholm que nous appliquerons ensuite au cas des fibrations Hamiltoniennes. Rappelons avant toute chose la notion même de système Fredholm (cf entres autres [4]).

**Définition 2.2.1.** *Un système Fredholm d'indice $d$ est un triplet $(\mathcal{B}, \mathcal{E}, s)$ tel que*

$(F_1)$ *$\mathcal{E}$ est l'espace total d'une fibration de Banach de projection $p$, au-dessus d'une variété de Banach $\mathcal{B}$,*

$(F_2)$ *$s : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{E}$ est une section propre,*

$(F_3)$ *pour tout $x \in s^{-1}(0)$, la linéarisation $L_x$ de $s$ en $x$,*

$$L_x : T_x\mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{E}_x := \pi^{-1}(x),$$

*est un opérateur de Fredholm d'indice $d$.*

La condition $(F_2)$ implique en particulier que $s^{-1}(0)$ est un sous-ensemble compact de $\mathcal{B}$. On appelle cet ensemble **espace de modules** du système.

**Exemple 2.2.1.** *Soit $p > 2$ un entier. Nous dénoterons par*

$$\mathcal{B}_B^{1,p}(\sigma_B),\ \ \mathcal{E}_B^p(\sigma_B, J_B),\ \ \mathcal{B}_P^{1,p}(\sigma),\ \ \mathcal{E}_P^p(\sigma, J_P),$$

*les complétions de Sobolev $W^{1,p}$ et les complétions $L^p$ des espaces*

$$\mathcal{B}_B(\sigma_B),\ \ \mathcal{E}_B(\sigma_B, J_B),\ \ \mathcal{B}_P(\sigma)\ \ et\ \ \mathcal{E}_P(\sigma, J_P).$$

*Ce sont dès lors des espaces de Banach dont les espaces linéaires sous-jacents sont par définition donnés par les complétions :*

$$\mathcal{X}_{P,u}^{1,p},\ \ \mathcal{X}_{B,u}^{1,p},\ \ \mathcal{E}_{P,u}^p(J_P^H),\ \ \mathcal{E}_{B,u}^p(J_B).$$

*Ici, les normes de $W^{1,p}$ et $L^p$ sont considérées relativement aux métriques $g_{J_P^H}$, $g_{J_B}$, ainsi qu'une forme de volume fixée sur $S^2$ compatible avec $j$. Explicitement, étant donné $\xi \in \mathcal{X}_{P,u}$ et $\eta \in \mathcal{E}_{P,u}(J_P^H)$, on définit les normes :*

$$\|\xi\|_{1,p} = \left(\int_{S^2} (|\xi|_{g_{J_P}}^p + |\nabla\xi|_{g_{J_P}}^p) dvol_{S^2}\right)^{\frac{1}{p}},\quad \|\eta\|_p = \left(\int_{S^2} |\xi|_{g_{J_P}}^p dvol_{S^2}\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{2.2.1}$$

*et similairement en remplaçant $P$ par $B$. Pour ces complétions, les opérateurs $D_u$ et $D_u^B$ sont Fredholm (ce sont des perturbations compactes de l'opérateur de Cauchy-Riemann usuel dans le cas intégrable, qui lui est elliptique), de sorte que les triplets :*

$$(\mathcal{B}_P^{1,p}(\sigma), \mathcal{E}_P^p(\sigma, J_P), \overline{\partial}_{J_P})\ \ et\ \ (\mathcal{B}_B^{1,p}(\sigma_B), \mathcal{E}_B^p(\sigma_B, J_B), \overline{\partial}_{J_B})$$

*satisfont les conditions $(F_1)$ et $(F_3)$. La condition $(F_2)$ ne sera en général pas respectée, et ne nous en préoccuperons plus, et dirons qu'un système est Fredholm s'il satisfait $(F_1)$ et $(F_3)$ seulement.*

**Définition 2.2.2.** *Une application $\Pi : (\mathcal{B}, \mathcal{E}, s) \longrightarrow (\mathcal{B}', \mathcal{E}', s')$ entre deux systèmes Fredholm est une application de fibrations au-dessus de variétés de Banach telle que si $L'$ dénote la linéarisation de $s'$ nous avons :*

$$\Pi(s) = s' \qquad et \qquad d\Pi \circ L = L'$$

Autrement dit, $\Pi$ est donnée par une paire $(\pi, \overline{\pi})$ où, $\pi : \mathcal{B} \to \mathcal{B}'$, $\overline{\pi} : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ (telles que pour tout $x \in \mathcal{B}$, $\overline{\pi}$ est un endomorphisme linéaire de $\mathcal{E}_x$ vers $\mathcal{E}'_{\pi(x)}$), telle que le deux diagrammes suivants commutent pour tout $x \in s^{-1}(0)$ :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \xrightarrow{\overline{\pi}} & \mathcal{E}' \\ {\scriptstyle s}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle s'} \\ \mathcal{B} & \xrightarrow{\pi} & \mathcal{B}' \end{array} \qquad \text{et} \qquad \begin{array}{ccc} \mathcal{E}_x & \xrightarrow{d\overline{\pi}(x,0)} & \mathcal{E}'_{\pi(x)} \\ {\scriptstyle L_x}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle L'_{\pi(x)}} \\ T_x\mathcal{B} & \xrightarrow{d\pi(x)} & T_{\pi(x)}\mathcal{B}' \end{array}$$

Observons que ceci est bien défini étant donné que $\overline{\pi}$ est linéaire sur chaque fibre de $\mathcal{E}$.

**Définition 2.2.3.** *Une application entre systèmes Fredholm* $\Pi := (\pi, \overline{\pi})$ *est appelée submersion si les linéarisées* $d\pi$ *et* $d\overline{\pi}$ *sont surjectives.*

Lorsque $\Pi$ est une submersion, nous obtenons le diagramme suivant dont les rangées sont exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \ker(d\overline{\pi}(x)) & \longrightarrow & \mathcal{E}_x & \xrightarrow{d\overline{\pi}(x)} & \mathcal{E}'_{\pi(x)} & \longrightarrow & 0 \\ & & {\scriptstyle L''_x}\uparrow & & {\scriptstyle L_x}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle L'_{\pi(x)}} & & \\ 0 & \longrightarrow & \ker(d\pi(x)) & \longrightarrow & T_x\mathcal{B} & \xrightarrow{d\pi(x)} & T_{\pi(x)}\mathcal{B}' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

où $L''_x$ désigne l'opérateur $L_x$ restreint à $\ker d\pi(x)$. Ainsi par le "lemme du serpent", nous pouvons extraire de ce diagramme la suite exacte suivante :

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \ker L''_x \longrightarrow \quad &\ker L_x \quad \longrightarrow \ker L'_{\pi(x)} \longrightarrow \\ \longrightarrow \quad &\operatorname{coker} L''_x \longrightarrow \operatorname{coker} L_x \longrightarrow \operatorname{coker} L'_{\pi(x)} \longrightarrow 0. \end{aligned} \qquad (2.2.2)$$

Nous observons directement à partir de ce diagramme que si $L''_x$ et $L'_{\pi(x)}$ sont surjectifs, alors $L_x$ doit aussi être surjectif. On peut alors conclure dans ce cas précis que $\ker L_x$ est isomorphe à $\ker L''_x \oplus \ker L'_{\pi(x)}$ (à un choix de section près de $\ker L'_{\pi(x)}$ vers $\ker L_x$ ) de sorte que nous avons aussi un scindement au niveau des indices. Cependant, ce résultat est vrai même lorsqu'une obstruction apparait :

**Lemme 2.2.1.** *Si* $\Pi$ *comme plus haut, est une submersion alors pour chaque* $x \in s^{-1}(0)$,

$$Ind(L_x) = Ind(L'_{\pi(x)}) + Ind(L''_x).$$

**Preuve:** Par exactitude de (2.2.2).

□

Nous donnons à présent la définition de scindement de système Fredholm que nous allons par la suite appliquer aux fibrations Hamiltoniennes :

**Définition 2.2.4.** *Une submersion* $\Pi$ *entre systèmes Fredholm est un* scindement *si la suite* (2.2.2) *est sans obstruction, i.e*

$$coker\ L''_x = coker\ L_x = coker\ L'_{\pi(x)} = 0,$$

*pour tout* $x \in s^{-1}(0)$.

Nous allons à présent montrer que l'application $\pi$ et la connexion $\tau$ nous donnent une submersion entre les systèmes Fredholm $(\mathcal{B}_P(\sigma), \mathcal{E}_P(\sigma, J_P), \overline{\partial}_{J_P})$ et $(\mathcal{B}_B(\sigma_B), \mathcal{E}_B(\sigma_B, J_B), \overline{\partial}_{J_B})$, où $\sigma_B$ désigne ici la classe projetée $\pi_*\sigma$. La projection $\pi : P \longrightarrow B$ induit les applications suivantes :

$$\pi : \mathcal{B}_P(\sigma) \longrightarrow \mathcal{B}_B(\sigma_B), \quad f \mapsto \pi \circ f, \tag{2.2.3}$$

et

$$\overline{\pi} : \mathcal{E}_P(\sigma, J_P) \longrightarrow \mathcal{E}_B(\sigma_B, J_B), \quad \eta \mapsto \pi_*(\eta). \tag{2.2.4}$$

Qui plus est, la connexion symplectique sur $P$ nous donne les décompositions suivantes de $\mathcal{E}_{P,u}(J_P)$ et $\mathcal{X}_{P,u}$ :

$$\mathcal{E}_{P,u} = \Gamma(\Lambda^{0,1}_{J_P}(S^2, u^*TP^h)) \oplus \Gamma(\Lambda^{0,1}_{J_P}(S^2, u^*TP^v)) =: \mathcal{E}^h_{P,u}(J_P) \oplus \mathcal{E}^v_{P,u}(J_P), \tag{2.2.5}$$

et

$$\mathcal{X}_{P,u} = \Gamma(S^2, u^*TP^h) \oplus \Gamma(S^2, u^*TP^v) = \mathcal{X}^h_{P,u} \oplus \mathcal{X}^v_{P,u}. \tag{2.2.6}$$

De surcroît nous avons que les applications

$$d\overline{\pi}(u,0) : \mathcal{E}_{P,u}(J_P) \longrightarrow \mathcal{E}_{B,\pi(u)}(J_B), \quad d\pi(u) : \mathcal{X}_{P,u} \longrightarrow \mathcal{X}_{B,\pi(u)},$$

sont toutes deux des submersions, étant donné que $d\pi$ l'est. Il nous reste à montrer la commutativité des diagrammes suivants :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}_P(\sigma, J_P) & \xrightarrow{\pi} & \mathcal{E}_B(\sigma_B, J_B) \\ {\scriptstyle \overline{\partial}_{J_P}}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \overline{\partial}_{J_B}} \\ \mathcal{B}_P(\sigma) & \xrightarrow{\pi} & \mathcal{B}_B(\sigma_B) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathcal{E}_{P,u}(J_P) & \xrightarrow{d\pi(u,0)} & \mathcal{E}_{B,\pi(u)}(J_B) \\ {\scriptstyle D_u}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle D_u^B} \\ \mathcal{X}_{P,u} & \xrightarrow{d\pi(u)} & \mathcal{X}_{B,\pi(u)} \end{array}$$

La commutativité du diagramme de gauche résulte du fait que $J_P$ est une structure fibrée au-dessus de $J_B$. Ainsi, l'espace de modules $(\overline{\partial}_{J_P})^{-1}(0)$ est bien envoyé sur l'espace de modules $(\overline{\partial}_{J_B})^{-1}(0)$. Nous démontrons à présent que le second diagramme commute.

**Lemme 2.2.2.** *Pour tout $\xi \in \mathcal{X}(u^*TP)$ nous avons :*

$$\pi_* D_u \xi = D^B_{\pi \circ u} \pi_* \xi.$$

Notons que cet énoncé montre un peu plus que nécessaire. Pour démontrer ce lemme nous utiliserons les identités suivantes :

**Lemme 2.2.3.** *Soient $\xi$ et $X$ des champs de vecteurs sur $P$, et soit $p \in P$. Alors nous avons :*

(i) $\pi_*[\xi^v, J_P X^h] = J_B \pi_*[\xi^v, X^h]$,

(ii) $\pi_*(\nabla_\xi J_P)_p X = (\nabla^{TB}_{\pi_*\xi} J_B)_{\pi(p)}(\pi_* X)$,

(iii) $\pi_*(\nabla^{0,1}_{du}\xi) = (\nabla^{TB}_{\pi_* du})^{0,1}\pi_*\xi - \pi_*[(\overline{\partial}_{J_P}(u))^h, \xi^v]^h$.

**Preuve:** (i) est donné par la définition du crochet de Lie, par holomorphie de la projection, et aussi parce que le flot d'un champ de vecteurs vertical partant d'un point $p$, doit rester dans la fibre au-dessus de $\pi(p)$. Maintenant, (ii) est une simple conséquence de (i). En effet, le premier point revient à dire que

$$[\xi^v, J_P X^h]^h = J_P[\xi^v, X^h]^h,$$

ce qui par définition de $\nabla$ est équivalent à

$$\nabla_{\xi^v}(J_P X^h) = J_P \nabla_{\xi^v}(X^h).$$

Nous concluons donc que

$$(\nabla_{\xi^v} J_P)(X^h) = 0,$$

ce qui, combiné au fait que la connexion est à valeurs dans le sous-fibré vertical dès que ses deux entrées sont dans $Vert$, nous donne l'équation espérée.

Pour la preuve du troisième point, rappelons que lors du calcul de l'opérateur linéarisé nous avions :

$$\nabla_{du}^{0,1}\xi = \frac{1}{2}(\nabla_\xi du + J_P(u)\nabla_\xi(du \circ j)) - R^{0,1}(du, \xi).$$

Donc, par définition de la connexion et étant donné que la courbure symplectique est à valeurs verticales, nous obtenons que :

$$\begin{aligned}
2\pi_*(\nabla_{du}^{0,1}\xi) &= \pi_*\nabla_\xi du + J_B(\pi(u))\pi_*\nabla_\xi(du \circ j) \\
&= \nabla_{\pi_*\xi}^{TB} d(\pi \circ u) + \pi_*[\xi^v, (du)^h]^h + J_B(\pi(u))\nabla_{\pi_*\xi}^{TB} d(\pi \circ u) \circ j \\
&\quad + J_B(\pi(u))\pi_*[\xi^v, (du \circ j)^h]^h \\
&= \nabla_{d(\pi \circ u)}^{TB}\pi_*\xi + J_B(\pi(u))\nabla_{d(\pi \circ u)\circ j}^{TB}\pi_*\xi + \pi_*[\xi^v, (du)^h + J_P(u)(du \circ j)^h]^h \\
&= 2(\nabla_{d(\pi \circ u)}^{TB})^{0,1}\pi_*\xi + \pi_*[\xi^v, 2(\overline{\partial}_{J_P}(u))^h]^h,
\end{aligned}$$

où la première égalité est due à (i) et au fait que $\nabla^{TB}$ est sans torsion. La dernière égalité résulte tout simplement du fait que $J_P$ préserve la distribution horizontale et le sous-fibré vertical.

□

**Remarque 2.2.1.** *Une simple conséquence de la seconde identité du lemme 2.2.3 et de la définition de $\nabla$ est que pour tout relevé horizontal, disons $\overline{X}$ d'un champ de vecteurs $X$ dans $B$ nous avons :*

$$\pi_*(\widetilde{\nabla}_\xi \overline{X}) = \widetilde{\nabla}_{\pi_*\xi}^{TB} X, \tag{2.2.7}$$

*où $\widetilde{\nabla}^{TB}$ désigne la connexion hermitienne $\nabla^{TB} - \frac{1}{2}J_B(\nabla^{TB}J_B)$. Cette égalité résulte du fait que $\overline{X}$ est invariant le long de champ de vecteurs verticaux, impliquant par la même que $\nabla_{\xi^v}\overline{X} = 0$.*

**Preuve:** (lemme 2.2.2) Par définition $\nabla_{du}^{0,1}\xi^v$ et $R^{0,1}(du, \xi)$ sont des formes à valeurs dans $Vert$. Par conséquent nous n'avons qu'à calculer les projections des termes $\nabla_{du}^{0,1}\xi^h$ et $J_P(u)(\nabla_\xi J_P)(\partial_{J_P} u)$ que nous avons calculés dans le lemme précédent. Nous obtenons donc :

$$\pi_\star D_u\xi = (\nabla^{TB}_{d(\pi\circ u)})^{0,1}\pi_\star\xi - \pi_\star[(\overline{\partial}_{J_P}(u))^h, \xi^v]^h - \frac{1}{2}J_B(\pi\circ u)(\nabla^{TB}_{\pi_\star\xi}J_B)(\pi_\star\partial_{J_P}u).$$

Comme $\pi_\star\partial_{J_P}u = \partial_{J_B}u_B$, il nous reste à montrer que :

$$[(\overline{\partial}_{J_P}(u))^h, \xi^v]^h_{u(z)} = 0 \quad \forall z \in S^2.$$

Si $(\overline{\partial}_{J_P}u)(z)^h = 0$, c'est évident. Si $(\overline{\partial}_{J_P}u)(z)^h \neq 0$ pour un certain $z$, on considère le relevé horizontal $\overline{X}$ de $(\overline{\partial}_{J_B}(\pi(u)))(z)$, défini sur $T(\pi^{-1}(u(z)))$, et qui coïncide avec $(\overline{\partial}_{J_P}u)(z)^h$ en $u(z)$. Nous avons dès lors que :

$$[(\overline{\partial}_{J_P}(u))^h, \xi^v]_{u(z)} = [\overline{X}, \xi^v]_{u(z)} = 0,$$

étant donné que $\overline{X}$ est constant le long des directions verticales.

□

Subséquemment au lemme 2.2.2, l'opérateur

$$D^H_u : \mathcal{X}^h_{P,u} \oplus \mathcal{X}^v_{P,u} \longrightarrow \mathcal{E}^h_{P,u} \oplus \mathcal{E}^v_{P,u}$$

prend la forme matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} (D^B_{\pi(u)})^h & 0 \\ L_u & D^{v,H}_u, \end{pmatrix} \tag{2.2.8}$$

où $L_u$ désigne ici l'opérateur linéaire :

$$L_u : \mathcal{X}^h_{P,u} \longrightarrow \mathcal{E}^v_{P,u}, \quad \xi \mapsto -\frac{1}{2}J(u)(\nabla_\xi J)(\partial_{J^H_P}u)^v + R^{0,1}(du^h, \xi).$$

En appliquant au cas présent le diagramme (2.2.2) nous obtenons la suite exacte suivante :

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \ker D^{v,H}_u \longrightarrow \quad & \ker D^H_u \quad \longrightarrow \ker D^B_{\pi(u)} \longrightarrow \\ \longrightarrow \quad \operatorname{coker} D^{v,H}_u \quad & \longrightarrow \operatorname{coker} D^H_u \longrightarrow \operatorname{coker} D^B_{\pi(u)} \longrightarrow 0, \end{aligned} \tag{2.2.9}$$

où nous remarquons que le connectant (la flèche allant de ker $D^B_{\pi(u)}$ vers coker $D^{v,H}_u$) est donné ici par l'application $L$, restreinte au noyau de $D^B_{\pi(u)}$. Nous allons dans la prochaine section, montrer comment pour des paramètres $J$, $J_B$ et $H$, génériques, cette suite exacte se scinde au-dessus d'un nombre dénombrable de points $u_B \in \mathcal{M}(B, \sigma_B, J_B)$.

## 2.3. Transversalité

Cette section est consacrée à montrer que l'on peut, pour des choix génériques de triplets $(J_B, J, H)$, réaliser la transversalité des sections $\overline{\partial}_{J_P^H}$ et $\overline{\partial}_{J_B}$ par rapport aux sections nulles correspondantes, de façon compatible avec la projection $\mathcal{F}_\pi$. Ceci revient en l'occurrence à montrer que les opérateurs linéarisés $D^H$ et $D^B$ sont surjectifs simultanément. Pour ce faire, nous devrons toutefois nous restreindre au sous-ensemble des applications holomorphes dans $P$ qui sont simples, et qui se projettent sur des courbes simples dans $B$. Rappelons ce que simple signifie :

**Définition 2.3.1.** *Soit $u \in C^\infty(S^2, P)$ une application $J_P^H$-holomorphe. On dit que $u$ est* **simple** *ssi il n'existe pas d'application lisse $\varphi : S^2 \longrightarrow S^2$ de degré supérieur à 1 ainsi qu'une application $u' \in C^\infty(S^2, P)$ satisfaisant $u = u' \circ \varphi$. Si $u$ n'est pas simple on dira qu'elle admet un* **revêtement multiple***, ou plus simplement qu'elle est* **ramifiée***.*

**Remarque 2.3.1.** *Il s'avère que les applications simples $u$ sont celles qui sont quelque part injectives, i.e telles qu'il existe $z \in S^2$ pour lequel $u$ et $du$ sont injectives. On peut aussi montrer que pour toute courbe simple, l'ensemble des points injectifs est ouvert et dense dans $S^2$. Dans ce qui suit, une courbe pseudo-holomorphe $u$ sera dite simple si elle est non-constante et quelque part injective, ou bien si $u$ est constante.*

Il est reconnu que les courbes ramifiées tendent à être des points critiques de l'opérateur linéarisé, dans le sens où ce dernier n'est pas surjectif en ces points. On introduit la notation suivante :

$$\mathcal{M}^*(P, \sigma; J_P^H) := \left\{u \in \mathcal{M}(P, \sigma; J_P^H) | u \text{ est simple}\right\}$$

et

$$\mathcal{M}^*(B, \sigma_B; J_B) := \{u_B \in \mathcal{M}(B, \sigma_B; J_B) | u_B \text{ est simple}\}.$$

On rappelle que $J_P^H$ fait référence à un triplet $(J_B, J, H)$.

**Remarque 2.3.2.** *C'est un fait connu que l'espace $\mathcal{M}^*(P,\sigma;J_P)$ est une variété lisse pour un choix générique de structure presque complexe $J_P$ compatible avec une forme symplectique sur $P$, $\omega_P$. Cependant, nous nous intéressons ici au cas particulier où les structures complexes sont fibrées, de sorte à préserver l'application (2.1.3).*

Supposons à partir de maintenant que $\sigma_B = \pi_*\sigma$. On observe que, à priori, l'image de $\mathcal{M}^*(P,\sigma;J_P^H)$ par $\mathcal{F}_\pi$ n'est pas incluse dans $\mathcal{M}^*(B,\sigma_B;J_B)$. Par exactitude de la suite (2.2.9), et étant donné que les courbes simples dans $P$ peuvent se projeter sur des courbes ramifiées de $B$, nous ne pouvons donc espérer réaliser la transversalité sur l'ensemble $\mathcal{M}^*(P,\sigma;J_P^H)$ tout entier, même génériquement.

En effet, si c'était le cas, cela signifierait que pour un choix générique de triplet $(J_B,J,H)$, nous aurions coker $D_u^H = 0$ pour tout $u \in \mathcal{M}^*(P,\sigma;J_P^H)$, ce qui par exactitude de (2.2.9) impliquerait directement que coker $D_{u_B}^B$ s'annule aussi génériquement. Voici un exemple :

**Exemple 2.3.1.** *On prend $B = \widetilde{\mathbb{C}P}^2$ le plan projectif complexe eclaté en un point muni de la structure complexe $J_0$ héritée de $\mathbb{CP}^2$ ($J_0$ est la structure complexe associée à la surface de Hirzebruch $\mathbb{P}(\mathcal{O}(-1)\oplus\mathbb{C})$), et on considère l'espace de modules $\mathcal{M}(\widetilde{\mathbb{C}P}^2, 2E, J_0)$, où $E$ représente la classe d'homologie du diviseur exceptionnel. Cet espace de modules a pour dimension virtuelle 4, donnée par les points de ramification des revêtements ramifiés de degré 2 de $S^2$ sur lui-même. Toutefois, le diviseur exceptionnel est une courbe rigide qui persiste dans un voisinage de $J_0$.*

Malgré tout, nous pouvons, comme nous allons le montrer, établir la transversalité si nous nous restreignons au sous-ensemble :

$$\mathcal{M}^{**}(P,\sigma;J_P^H) := \{u \in \mathcal{M}^*(P,\sigma;J_P^H) | \pi(u) \in \mathcal{M}^*(B,\sigma_B;J_B)\}.$$

Nous rappelons ci-dessous la notion de paramètres régularisants.

**Définition 2.3.2.** *Soit $\sigma_B \in H_2(B,\mathbb{Z})$. La structure presque complexe $J_B \in \mathcal{J}(B,\omega_B)$ est dite* **régulière** *pour la classe $\sigma_B$, si pour tout $u_B \in \mathcal{M}^*(B,\sigma_B;J_B)$ l'opérateur $D_{u_B}^B$ est surjectif. Nous dénoterons par $\mathcal{J}_{reg}(B,\omega_B,\sigma_B)$ l'ensemble de ces structures, ou encore plus simplement par $\mathcal{J}_{B,reg}(\sigma_B)$.*

Similairement, on définit l'ensemble des triplets régularisants $(J_B, J, H)$ :

**Définition 2.3.3.** *Soit $\sigma \in H_2(P, \mathbb{Z})$. L'ensemble des* ***paramètres réguliers*** *est défini de la façon suivante :*

$$\mathcal{P}_{reg}(\sigma) := \{J_P^H := (J_B, J, H) \in \mathcal{P} | \forall u \in \mathcal{M}^{**}(P, \sigma; J_P^H),\ coker\ D_u^H = 0\}.$$

**Remarque 2.3.3.** *On remarque aisément que si $(J_B, J, H) \in \mathcal{P}_{reg}(\sigma)$ alors $J_B \in \mathcal{J}_{B,reg}(\sigma_B)$.*

Pour une structure presque complexe régulière $J_B$ fixée, on définit les **paires régularisantes de fibres**, comme suit :

**Définition 2.3.4.** *Fixons $J_B \in \mathcal{J}_{reg}(B, \omega_B, \sigma_B)$. Soit $u_B \in \mathcal{M}^*(B, \sigma_B; J_B)$ et $\sigma \in H_2(P; \mathbb{Z})$ telle que $\sigma_B = \pi_* \sigma$. Une paire $(J, H) \in \mathcal{J}^{vert} \times \mathcal{H}$ est dite régulière pour la fibre $\mathcal{F}_\pi^{-1}(u_B)$, si pour tout $u \in \pi^{-1}(u_B)$ l'opérateur $D_u^{v,H}$ est surjectif. L'ensemble de toutes ces paires est dénoté par $\mathcal{JH}_{reg}(u_B, J_B, \sigma)$.*

Nous allons démontrer l'affirmation suivante :

**Théorème 2.3.1.** *Soit $P \longrightarrow (B, \omega_B)$ une fibration Hamiltonienne comme précédemment et soient $\sigma \in H_2(P; \mathbb{Z})$ et $\sigma_B := \pi_*(\sigma)$.*

(i) *Si $(J_B, J, H) \in \mathcal{P}_{reg}(\sigma)$, l'espace $\mathcal{M}^{**}(P, \sigma; J_P^H)$ est une variété ouverte lisse et orientée ayant pour dimension*

$$Ind(D^H) = 2n_P + 2c_1(\sigma).$$

*De plus, l'ensemble $\mathcal{P}_{reg}(\sigma)$ est de deuxième catégorie (Baire) dans $\mathcal{P}$.*

(ii) *Fixons $J_B \in \mathcal{J}_{B,reg}(\sigma_B)$ et soit $u_B \in \mathcal{M}^*(B, \sigma_B; J_B)$. Si $(J, H)$ est un élément de $\mathcal{JH}_{reg}(u_B, J_B, \sigma)$, l'espace $\pi^{-1}(u_B)$ est une variété ouverte lisse et orientée de dimension*

$$Ind(D^{v,H}) = 2n_F + 2c_1^{Vert}(\sigma).$$

*Qui plus est, l'ensemble $\mathcal{JH}_{reg}(u_B, J_B, \sigma)$ est de deuxième catégorie.*

**Remarque 2.3.4.** *La variation de la forme de couplage est essentielle ici, comme le remarque* [29]. *En effet, il est tout à fait possible que l'on ne puisse régulariser l'espace $\mathcal{M}^*(P, \sigma; J, J_B)$ en déformant seulement la famille $J$ et la structure $J_B$. C'est le cas, par exemple, lorsqu'il existe une application $J_P$-holomorphe $u : S^2 \longrightarrow P$* ***horizontale*** *i.e telle que $Im(du) \subset Hor$, et dont l'indice de l'opérateur* *vertical $D^v_u$ est négatif. Une telle courbe reste holomorphe et horizontale après déformation de la paire $(J_B, J)$, sans toutefois rendre $D^v_u$ surjectif. Déformer la connexion permet en l'occurrence d'éviter ces courbes horizontales non régulières.*

Avant d'entamer la preuve de ce théorème, nous introduisons quelques ingrédients supplémentaires. Soit $r > 0$ un entier. On désignera par $\mathcal{P}^r$,$\mathcal{J}^r_B$ et $\mathcal{J}^{Vert,r}$ les restrictions aux éléments de classe $C^r$ de $\mathcal{P}$, $\mathcal{J}_B$ et $\mathcal{J}^{Vert}$ respectivement. On considèrera aussi les projections sur les premier, deuxième et troisième facteurs de $\mathcal{P}^r$ :

$$p_1 : \mathcal{P}^r \longrightarrow \mathcal{J}^r_B, \quad p_2 : \mathcal{P}^r \longrightarrow \mathcal{J}^{vert,r}, \quad p_3 : \mathcal{P}^r \longrightarrow \mathcal{H}^r, \tag{2.3.1}$$

ainsi que les projections :

$$p_{23} : \mathcal{P}^r \longrightarrow \mathcal{J}^{vert,r} \times \mathcal{H}^r \quad \text{et} \quad p_{13} : \mathcal{P}^r \longrightarrow \mathcal{J}^r_B \times \mathcal{H}^r. \tag{2.3.2}$$

On définit à présent les systèmes de Fredholm universels associés aux espaces de paramètres $\mathcal{P}^r$ et $\mathcal{J}^r_B$. Posons :

$$\mathcal{E}^p_P(\sigma) := \bigsqcup_{J^H_P \in \mathcal{P}^r} \mathcal{E}^p_P(\sigma, J^H_P) \quad \text{et} \quad \mathcal{E}^p_B(\sigma_B) := \bigsqcup_{J_B \in \mathcal{J}^r_B} \mathcal{E}^p_B(\sigma_B, J_B).$$

Ce sont des espaces fibrant au-dessus des espaces de Banach :

$$\mathcal{B}^{1,p}_P(\sigma) \times \mathcal{P}^r \quad \text{et} \quad \mathcal{B}^{1,p}_B(\sigma_B) \times \mathcal{J}^r_B,$$

dont les fibres au-dessus de $(u, J_B, J, H)$ et $(u_B, J_B)$ sont respectivement données par les espaces vectoriels de Banach $\mathcal{E}^p_{P,u}(J^H_P)$ et $\mathcal{E}^p_{B,u_B}(J_B)$.

**Lemme 2.3.2.** *$\mathcal{E}^p_P(\sigma)$ et $\mathcal{E}^p_B(\sigma_B)$ sont des fibrations de Banach de classe $C^{r-1}$ que l'on peut localement trivialiser de façon compatible avec la projection :*

$$\begin{aligned} p := \pi \times p_1 : \mathcal{B}^{1,p}_P(\sigma) \times \mathcal{P}^r &\longrightarrow \mathcal{B}^{1,p}_B(\sigma_B) \times \mathcal{J}^r_B \\ (u, J_B, J, H) &\mapsto (\pi(u), J_B). \end{aligned}$$

**Preuve:** Pour alléger les notations, oublions les classes d'homologie. On veut trivialiser $\mathcal{E}_P$ autour de $(u, J_B, J, H)$ tout en trivialisant $\mathcal{E}_B$ autour de $(\pi(u), J_B)$. Pour ce faire, on utilise les applications exponentielles associées aux connexions $\nabla^H$ et $\nabla^{TB}$ afin d'identifier des voisinages

$$\mathcal{N}(u) \subset \mathcal{B}^{1,p}_P \quad \text{et} \quad \mathcal{N}(\pi(u)) \subset \mathcal{B}^{1,p}_B$$

de $u$ et de $\pi(u)$, avec des voisinages de zéro dans $\mathcal{X}^{1,p}_{P,u}$ et $\mathcal{X}^{1,p}_{B,\pi(u)}$ (resp). Etant donné que $\pi$ est une submersion, et par définition de $\nabla^H$, on peut choisir les voisinages $\mathcal{N}(u)$ et $\mathcal{N}(\pi(u))$ de sorte que $\pi(\mathcal{N}(u)) = \mathcal{N}(\pi(u))$ et tels que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{N}(u) \arrow[r, "\exp"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathcal{X}^{1,p}_{P,u} \arrow[d, "d\pi"] \\
\mathcal{N}(\pi(u)) \arrow[r, "\exp"] & \mathcal{X}^{1,p}_{B,\pi(u)}
\end{tikzcd}$$

On utilise par la suite les transports parallèles associés aux connexions hermitiennes $\widetilde{\nabla}^{TB}$ et $\widetilde{\nabla}^H$ afin d'identifier les fibres au-dessus des voisinages $\mathcal{N}(u)$ et $\mathcal{N}(\pi(u))$. Ceci nous donne une section

$$\mathcal{N}(u) \times \{J_B\} \times \{J\} \times \{H\} \subset \mathcal{B}^{1,p}_P \times \mathcal{J}^r_B \times \mathcal{J}^{Vert,r}\mathcal{H}^r,$$

se projetant via $\pi$ sur la section :

$$\mathcal{N}(\pi(u)) \times \{J_B\} \subset \mathcal{B}^{1,p}_B \times \mathcal{J}^r_B.$$

On étend ces sections à des voisinages $\mathcal{N}(J_B) \times \mathcal{N}(J) \times \mathcal{N}(H)$ et $\mathcal{N}(J_B)$ de $(J_B, J, H)$ et $J_B$. Pour ce faire on introduit les identifications suivantes : soit $J^{H'}_P \equiv (J'_B, J', H') \in \mathcal{N}(J_B) \times \mathcal{N}(J) \times \mathcal{N}(H)$, on considère les isomorphismes

$$p^{0,1}_P : \Lambda^{0,1}_{J^H_P}(S^2, u^*TP) \longrightarrow \Lambda^{0,1}_{J^{H'}_P}(S^2, u^*TP), \quad \eta \mapsto \frac{1}{2}(\eta + J^{H'}_P \circ \eta \circ j),$$

et

$$p^{0,1}_B : \Lambda^{0,1}_{J_B}(S^2, \pi(u)^*TB) \longrightarrow \Lambda^{0,1}_{J'_B}(S^2, \pi(u)^*TB), \quad \eta \mapsto \frac{1}{2}(\eta + J'_B \circ \eta \circ j),$$

qui, clairement, satisfont la relation $d\pi \circ p^{0,1}_P = p^{0,1}_B \circ d\pi$. Ces isomorphismes permettent d'identifier entre eux les espaces

$$\mathcal{E}_{P,u}(J^H_P) \text{ avec } \mathcal{E}_{P,u}(J^{H'}_P) \text{ ainsi que } \mathcal{E}_{B,\pi(u)}(J_B) \text{ avec } \mathcal{E}_{B,\pi(u)}(J'_B).$$

Finalement, on utilise encore une fois les connexions $\widetilde{\nabla}^H$ et $\widetilde{\nabla}^{TB}$ afin d'obtenir les trivialisations de $\mathcal{E}_P$ et de $\mathcal{E}_B$, au-dessus des ouverts respectifs

$$\mathcal{N}(u) \times \mathcal{N}(J_B) \times \mathcal{N}(J) \times \mathcal{N}(H) \text{ et } \mathcal{N}(\pi(u)) \times \mathcal{N}(J_B).$$

Notons que par construction nous avons la compatibilité évoquée. De surcroît, étant donné que $H$, $J$ et $J_B$ sont tous trois de classe $C^r$ et parce que nous avons eu recours au transport parallèle, les fibrés obtenus $\mathcal{E}_P$ et $\mathcal{E}_B$ sont de classe $C^{r-1}$. $\square$

Ces fibrations de Banach, $\mathcal{E}_P$ et $\mathcal{E}_B$, admettent respectivement les sections suivantes (induites par les opérateurs de Cauchy-Riemann.) :

$$\overline{\partial}_P : (u, J_P^H) \mapsto \overline{\partial}_{J_P^H} u \quad \text{et} \quad \overline{\partial}_B : (u_B, J_B) \mapsto \overline{\partial}_{J_B} u_B.$$

La linéarisation de $\overline{\partial}_P$ en le point $(u, J_P^H)$ est donnée par :

$$\begin{aligned} \widetilde{D}_{u,J_P^H} : \mathcal{X}_{P,u}^{1,p} \oplus T_{J_P^H}\mathcal{P}^r &\longrightarrow \mathcal{E}_{P,u}^p(J_P^H) \\ (\xi, Y^v, Y, f) &\mapsto D_u^H \xi + \frac{1}{2} Y^v \circ (du)^v \circ j + \\ &\qquad \frac{1}{2}(Y \circ du_B \circ j)^{h,H} + X_{f(du)}^{0,1}, \end{aligned}$$

où $u_B \equiv \pi(u)$, et $(Y \circ du_B) \circ j)^{h,H}$ désigne le relevé horizontal de $(Y \circ d(u_B) \circ j)$ par rapport à la connexion induite par $\tau_H$. De la même façon on obtient la linéarisation de $\overline{\partial}_B$ en le point $(u_B, J_B)$ :

$$\begin{aligned} \widetilde{D}_{u_B,J_B}^B : \mathcal{X}_{B,u}^{1,p} \oplus T_{J_B}\mathcal{J}_B^r &\longrightarrow \mathcal{E}_{B,u}^p(J_P^H) \\ (\xi, Y) &\mapsto D_{u_B}^B \xi + \frac{1}{2} Y \circ d(u_B) \circ j. \end{aligned}$$

On définit les systèmes **universels** :

$$(\mathcal{B}_P^{1,p}(\sigma), \mathcal{E}_P^p(\sigma), \overline{\partial}_P) \text{ et } (\mathcal{B}_B^{1,p}(\sigma_B), \mathcal{E}_B^p(\sigma_B), \overline{\partial}_B). \tag{2.3.3}$$

**Définition 2.3.5.** ***Les espaces de modules universels***

$$\mathcal{M}(P, \sigma, \mathcal{P}^r) \quad et \quad \mathcal{M}(B, \sigma_B, \mathcal{J}_B^r),$$

*sont les espaces de modules associés aux systèmes universels* (2.3.3).

Autrement dit, ces espaces de modules universels sont définis comme étant les ensembles :

$$\mathcal{M}(P, \sigma, \mathcal{P}^r) := \overline{\partial}_P^{-1}(0) \cap \mathcal{B}_P^{1,p}(\sigma) \text{ et } \mathcal{M}(B, \sigma_B, \mathcal{J}_B^r) := \overline{\partial}_B^{-1}(0) \cap \mathcal{B}_B^{1,p}(\sigma_B). \tag{2.3.4}$$

Dénotons par $\overline{p}$ l'application de fibrés entre $\mathcal{E}_P$ et $\mathcal{E}_B$ induite par $p$ et $d\pi$. Nous obtenons le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}_P & \xrightarrow{\overline{p}} & \mathcal{E}_B \\ \uparrow{\scriptstyle \overline{\partial}_P} & & \uparrow{\scriptstyle \overline{\partial}_B} \\ \mathcal{B}_P^{1,p} \times \mathcal{P}^r & \xrightarrow{p} & \mathcal{B}_B^{1,p} \times \mathcal{J}_B^r \end{array} \tag{2.3.5}$$

Par le lemme 2.2.2 et étant donné que $X^{0,1}_{f(du)}$ et $Y^v \circ (du)^v \circ j$ sont à valeurs dans $Vert$, nous tirons de (2.3.5) le diagramme suivant (où $u_B := \pi(u)$) :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}^p_{P,u}(J_P^H) & \xrightarrow{d\overline{p}} & \mathcal{E}^p_{B,u_B}(J_B) \\ \uparrow{\scriptstyle \widetilde{D}_{u,J_P^H}} & & \uparrow{\scriptstyle \widetilde{D}'_{u_B,J_B}} \\ \mathcal{X}^{1,p}_{P,u} \oplus T_{J_P^H}\mathcal{P}^r & \xrightarrow{dp} & \mathcal{X}^{1,p}_{B,u_B} \oplus T_{J_B}\mathcal{J}_B^r \end{array} \tag{2.3.6}$$

On remarque que les applications $dp$ et $d\overline{p}$ héritent de la surjectivité de $d\pi$ et de $dp_1$. Par conséquent, nous dérivons la suite exacte suivante analogue de la suite (2.2.2), au cas présent :

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \ker \widetilde{D}^{v,H}_{u,J_P^H} \longrightarrow \quad & \ker \widetilde{D}^{H}_{u,J_P^H} \longrightarrow \ker \widetilde{D}^{B}_{\pi(u),J_B} \longrightarrow \\ \longrightarrow \quad & \text{coker } \widetilde{D}^{v,H}_{u,J_P^H} \longrightarrow \text{coker } \widetilde{D}^{H}_{u,J_PH} \longrightarrow \text{coker } \widetilde{D}^{B}_{\pi(u),J_B} \longrightarrow 0, \end{aligned} \tag{2.3.7}$$

où $\widetilde{D}^v_{u,J_P^H}$ désigne simplement la restriction de $\widetilde{D}_{u,J_P^H}$ au noyau de $dp$.

Nous allons montrer que cette suite se scinde lorsque l'on se restreint aux sous-espaces des espaces universels (2.3.4) :

$$\mathcal{M}^*(B, \sigma_B, \mathcal{J}_B^r) := \{(u_B, J_B) \in \mathcal{M}(B, \sigma_B, \mathcal{J}_B^r) | u_B \text{ simple}\}, \tag{2.3.8}$$

et

$$\mathcal{M}^{**}(P, \sigma, \mathcal{P}^r) := \{(u, J_P^H) \in \mathcal{M}(P, \sigma, \mathcal{P}^r) | u \text{ simple}\} \cap p^{-1}(\mathcal{M}^*(B, \sigma_B, \mathcal{J}_B^r)). \tag{2.3.9}$$

Pour ce faire, il suffit de montrer que les obstructions possibles provenant des opérateurs $\widetilde{D}^v$ et $\widetilde{D}^B$ s'annulent.

**Remarque 2.3.5.** *La surjectivité de l'opérateur $\widetilde{D}^B$ est bien connue dès que l'on se restreint aux courbes simples de $B$, i.e soit non-constantes et simples, soit constantes ([29]). Cette surjectivité implique en l'occurrence que $\mathcal{M}(B,\sigma_B;\mathcal{J}_B^r)$ est une variété de Banach et on peut montrer que la projection*

$$p^{\mathcal{J}_B^r} : \mathcal{M}(B,\sigma_B;\mathcal{J}_B^r) \longrightarrow \mathcal{J}_B^r$$

*est un opérateur de Fredholm dont les valeurs régulières coïncident avec $\mathcal{J}_{reg}(B,\omega_B)$. Lorsque la courbe holomorphe est constante, ce qui s'exprime par $\omega_B(\sigma_B) = 0$, on montre même que $\mathcal{J}_{reg}(B,\omega_B) = \mathcal{J}_c(B,\omega_B)$. En d'autres termes, l'opérateur $D^B_{u_B}$ est surjectif pour toute courbe $J_B$-holomorphe $u_B$ et ceci pour toute structure presque complexe $J_B$, compatible avec $\omega_B$. En effet, soit $u_B \in \mathcal{M}(B,\sigma_B;J_B)$ telle que $u_B \equiv b \in B$. Alors l'opérateur linéarisé $D^B_{u_B}$ coïncide avec l'opérateur de Cauchy-Riemann :*

$$\overline{\partial}_{J_B,b} : \Gamma(S^2,\mathbb{C}^{n_B}) \longrightarrow \Gamma(\Lambda^{0,1}(S^2,\mathbb{C}^{n_B})), \tag{2.3.10}$$

*qui est surjectif pour tout $J_B$ et $b$, étant donné que $S^2$ est simplement connexe et que*

$$\text{coker}\, \overline{\partial}_{J_B,b} \cong H^{0,1}(S^2,\mathbb{C}^{n_B}).$$

Nous pouvons désormais procéder à la preuve du théorème 2.3.1.

**Preuve:** Dans les deux cas, l'affirmation concernant la structure de variété suit du théorème des fonctions implicites, ainsi que de la remarque 2.3.3. Le fait que ces espaces sont naturellement orientés est obtenu en homotopant les termes d'ordres 0 de $D^H$ à 0 (voir [27]). Les dimensions, quant à elles, résultent du théorème de Riemann-Roch donnant l'indice de l'opérateur de Cauchy-Riemann en termes topologiques.

On prouve maintenant les affirmations concernant la généricité des paramètres réguliers. Nous procédons de la même façon que pour le cas de la base (cf remarque 2.3.5). Nous allons donc démontrer que pour tout entier $r > 0$, les espaces de modules universels sont des variétés de Banach de classe $C^{r-1}$. Pour $r > 2$ suffisamment grand, on applique le théorème de Sard-Smale, pour les espaces de

Banach (séparables), aux projections :

$$p^{\mathcal{P}^r} : \mathcal{M}^{**}(P, \sigma; \mathcal{P}^r) \longrightarrow \mathcal{J}_B^r \times \mathcal{J}^{vert,r} \times \mathcal{H}^r,$$

dans le cas (i), et

$$p_{23} \circ p^{\mathcal{P}^r}(u_B, J_B) : (\mathcal{F}_\pi^{univ})^{-1}(u_B, J_B) \longrightarrow \mathcal{J}^{vert,r} \times \mathcal{H}^r,$$

dans le cas (ii), où $(u_B, J_B)$ est un élément de $\mathcal{M}^*(B, \sigma_B; \mathcal{J}_B^r)$ et où

$$\mathcal{F}_\pi^{univ} : \mathcal{M}^{**}(P, \sigma; \mathcal{P}^r) \longrightarrow \mathcal{M}^*(B, \sigma_B; \mathcal{J}_B^r) \tag{2.3.11}$$

est donnée par restriction de $p$. Le résultat suit pour les paramètres de classe $C^\infty$ en utilisant l'argument de Taubes dont la preuve est donnée dans [**29**] au chapitre 3, et que nous omettrons. Afin de rendre l'exposition claire, on traitera les deux points séparément.

**L'affirmation (i).** On divise la preuve en deux parties, dépendemment si les courbes dans $P$ se projettent sur $B$ trivialement ou non.

- **Le cas** $\omega_B(\sigma_B) \neq 0$. De par la remarque 2.3.5, nous n'avons plus qu'à prouver que $\widetilde{D}^v$ est surjectif. Notons que le quadruplet $(\xi, Y^v, Y, f)$ est dans $\ker dp$ ssi $Y \equiv 0$ et $\xi$ est verticalement valué. Nous pouvons donc écrire

$$\widetilde{D}^v_{u,J_P^H} : \mathcal{X}_{P,u}^{1,p,v} \oplus T_J\mathcal{J}^{vert,r} \oplus T_f\mathcal{H}^r \longrightarrow \mathcal{E}_{P,u}^{p,v}.$$

  Nous allons montrer que $\widetilde{D}^v_{u,J_P^H}$ est surjective même en fixant $Y^v$ à 0. Pour $Y^v \equiv 0$, l'opérateur $\widetilde{D}^v_{u,J_P^H}$ ne fait intervenir que la connexion de L-C verticale. McDuff et Salamon ont montré dans [**29**] que cet opérateur est surjectif lorsque la base est une surface de Riemann. Néanmoins leur argument s'applique encore dans le cas plus général où $B$ est quelconque.

  Rappelons que $D_u^H$ est Fredholm et par conséquent son image est fermée. Ainsi l'image de $\widetilde{D}^v_{u,J_P^H}$ est également fermée et nous montrons que cette image est dense aussi. Supposons que ce n'est pas le cas. Alors, par le théorème de Hahn-Banach il existe un élément non nul $\eta \in L^q(\Lambda^{0,1}_{J_P^H}(S^2, u^*TP^v))$, où $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, tel que pour tout $(\xi, f) \in \mathcal{X}^{1,p}_{P,u} \times \mathcal{H}^r$ nous avons :

$$\int_{S^2} \left\langle \widetilde{D}^v_{u,J_B,H}(\xi, f), \eta \right\rangle_{g_J} dvol_{S^2} = 0.$$

En posant $h = 0$ ou $\xi = 0$ nous obtenons les identités suivantes :

$$\int_{S^2} \langle D^H_u \xi, \eta \rangle \, dvol_{S^2} = 0 \quad \text{et} \quad \int_{S^2} \left\langle X^{0,1}_{f(du)}, \eta \right\rangle dvol_{S^2} = 0. \tag{2.3.12}$$

La première nous donne que $\eta$ est de classe $W^{1,p}$, et est dans le noyau de l'adjoint formel $(D^H_u)^*$ de $D^H_u$ ce qui exprime le fait que $\eta$ appartient à coker $D^H_u$. Maintenant, supposons que $z_0$ est un point injectif à la fois de $u$ et de $u_B$, tel que $\eta(z_0) \neq 0$. L'ensemble de ces points $z_0$ est ouvert et dense dans $S^2$ étant donné que nous restreignons notre attention aux applications dans $P$ se projetant sur des courbes simples de $B$. Par le lemme 1.3.1, il existe $f_0 \in C^\infty_0(F_{\pi(u(z_0))})$ tel que :

$$\left\langle X^{0,1}_{f_0(du_{z_0})}, \eta(z_0) \right\rangle > 0.$$

Soit $f$ un élément de $\mathcal{H}^r$ qui coïncide avec $f_0$ en $\pi(u(z_0))$. Par continuité du pairing et comme $z_0$ est un point injectif de $u$, il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de $z_0$ et un voisinage $\mathcal{U}$ de $u(z_0)$, tels que $u$ envoie $\mathcal{V}$ sur $\mathcal{U}$ de façon difféomorphe et tels que la fonction

$$\left\langle X^{0,1}_{f(du_z)}, \eta(z) \right\rangle,$$

est strictement positive pour tout $z \in \mathcal{V}$. On remarque que $\mathcal{U}$ peut être réalisé comme l'intersection

$$\pi^{-1}(\mathcal{U}_B) \cap \operatorname{Im}(u),$$

où $\mathcal{U}_B$ est un voisinage autour de $\pi(u(z_0))$ difféomorphe à $\mathcal{V}$ (via $\pi \circ u$). On peut choisir une fonction $\beta$ à valeurs dans $[0, 1]$ avec support dans $\mathcal{U}_B$ et telle que $\beta(\pi(u(z_0))) = 1$. Ainsi, si on désigne par $\widetilde{\beta}$ le pull-back de $\beta$ par $\pi$, nous obtenons que :

$$\int_{S^2} \left\langle X^{0,1}_{\widetilde{\beta}(u(z)) f(du_z)}, \eta(z) \right\rangle dvol_{S^2} > 0,$$

ce qui entre en contradiction avec la deuxième équation de (2.3.12), et prouvant par là même que $\eta$ doit s'annuler dans un voisinage de $z_0$. Comme ce raisonnement est valable pour tout point injectif, nous avons que $\eta$ est nul presque partout. Mais, comme $W^{1,p}$ se plonge dans les fonctions continues pour $p > 2$,

$\eta$ est continue et nous concluons donc que $\eta \equiv 0$. L'opérateur $\widetilde{D}^v_{u,J_P^H}$ est donc bien surjectif.

Par l'exactitude de la suite (2.3.7), nous obtenons que coker $\widetilde{D}_{u,J_P^H} = 0$ pour toute paire $(u, J_P^H)$, de sorte que par le théorème des fonctions implicites, $\mathcal{M}(P, \sigma; \mathcal{P}^r)$ est une variété de Banach de classe $C^{r-1}$, fibrant au-dessus de $\mathcal{P}^r$ via l'application $p^{\mathcal{P}^r}$. La linéarisation de cette dernière est une application Fredholm ayant pour noyau :

$$\{(\xi, 0, 0, 0) \in \mathcal{X}^{1,p}_{P,u} \oplus T_{J_P^H}\mathcal{P}^r | \widetilde{D}_{u,J_P^H}\xi = 0\},$$

qui est isomorphe de façon évidente à ker $D_u^H$. Quant à son conoyau, il est donné par l'ensemble :

$$\{(Y^v, Y, f) \in T_{J_P^H}\mathcal{P}^r \mid \frac{1}{2}(Y^v \circ (du)^v \circ j) + \frac{1}{2}(Y \circ du_B \circ j)^{h,H} + X^{0,1}_{f(du)} \notin \mathrm{Im} D_u^H\},$$

qui est lui aussi identifiable à coker $D_u^H$. Par conséquent,

$$dp^{\mathcal{P}^r}(u, J_P^H) \quad \text{et} \quad D_u^H,$$

ont même indice, et en appliquant le théorème de Sard-Smale, dès $r - 2 > \mathrm{Ind}(p^{\mathcal{P}^r})$, on conclut que l'ensemble des valeurs régulières de $p^{\mathcal{P}^r}$ est un ensemble de deuxième catégorie qui s'avère être exactement donné par l'ensemble $\mathcal{P}^r_{reg}(\sigma)$. Le cas $C^\infty$ résulte d'un argument de Taubes.

- **Le cas** $\omega_B(\sigma_B) = 0$. Cette condition nous assure que toute courbe $J_P$-holomorphe dans $P$ représentant la classe $\sigma$ doit se projeter sur une application constante, autrement $\sigma_B = 0$. Remarquons que pour toute classe $\sigma \in H_2(P; \mathbb{Z})$ satisfaisant $\pi_*\sigma = 0$, il existe une famille de classes $\sigma_b \in H_2(F_b; \mathbb{Z})$ indicée par les points de $B$, et telle que $\iota_b(\sigma_b) = \sigma$. Ici, $\iota_b$ désigne simplement l'inclusion en homologie de la fibre $F_b$ dans $P$. Par ce qui a été dit, il résulte que :

$$\mathcal{M}^*(P, \sigma; J_P^H) = \{(b, v) \mid b \in B \text{ and } v \in \mathcal{M}^*(F_b, \sigma_b; J_b)\},$$

où $\mathcal{M}^*(F_b, \sigma_b; J_b)$ désigne l'espace de modules des courbes $J_b$-holomorphes et simples dans la fibre $F_b$, représentant la classe $\sigma_b$. Etant donné que $\mathrm{Im}(du) \subset$

$TP^v_{\pi(u)}$ nous tirons que $\frac{1}{2}(Y \circ du_B \circ j)^{h,H}$ et $X^{0,1}_{f(du)}$ n'apparaissent pas dans (2.3.3). Par conséquent :

$$\widetilde{D}_{u,J^H_P}(\xi, Y^v, Y, f) = D^H_u \xi + \frac{1}{2} Y^v \circ (du)^v \circ j,$$

pour touts vecteurs $Y$ et $f$, d'où nous pouvons restreindre notre attention au cas où $Y$ et $f$ sont identiquement nuls. La preuve que la restriction verticale de $\widetilde{D}_{u,J^H_P}$ est surjective est presque mot à mot la même que dans le cas précédent. En fait, ce n'est qu'une version paramétrique de l'argument de transversalité pour l'espace de modules des applications $J$-holomorphes dans la fibre de référence $(F, \omega)$. Nous en omettrons donc la preuve.

**L'affirmation (ii)**. De par ce qui a été démontré plus haut, la suite exacte (2.3.7) se réduit à la suite courte exacte suivante :

$$0 \longrightarrow \ker \widetilde{D}^v_{u,J^H_P} \longrightarrow \ker \widetilde{D}_{u,J^H_P} \longrightarrow \ker \widetilde{D}^B_{u_B,J_B} \longrightarrow 0.$$

Ainsi, pour tout entier $r$, l'application

$$\mathcal{F}^{univ}_\pi : \mathcal{M}^{**}(P, \sigma; \mathcal{P}^r) \longrightarrow \mathcal{M}^*(B, \sigma_B; \mathcal{J}^r_B),$$

est submersion (lisse). Fixons $J_B \in \mathcal{J}^r_{B,reg}(\sigma_B)$ et soit $u_B \in \mathcal{M}^*(B, \sigma_B; J_B)$. Nous avons donc que $(\mathcal{F}^{univ}_\pi)^{-1}(u_B, J_B)$ est une variété de Banach (séparable), de classe $C^{r-1}$ par le théorème des fonctions implicites. On vérifie que la linéarisation de l'application

$$p_{23} \circ p^{\mathcal{P}^r} : (\mathcal{F}^{univ}_\pi)^{-1}(u_B, J_B) \longrightarrow \mathcal{J}^{vert,r} \times \mathcal{H}^r,$$

est une application de Fredholm dont les noyaux et conoyaux sont respectivement isomorphes à $\ker D^{v,H}_u$ et $\operatorname{coker} D^{v,H}_u$, au point $(u, J_B, J, H) \in (\mathcal{F}^{univ}_\pi)^{-1}(u_B, J_B)$. Par Sard-Smale, on conclut, que dès que $r - 2 > \operatorname{Ind}(p^r)$, l'ensemble des valeurs régulières de $p_{23} \circ p^{\mathcal{P}^r}$ est de deuxième catégorie dans $\mathcal{J}^{vert,r} \times \mathcal{H}^r$ et coïncide avec l'ensemble $\mathcal{J}\mathcal{H}^r_{reg}(u_B, J_B, \sigma)$. Le théorème résulte alors par l'argument de Taubes.

$\square$

**Remarque 2.3.6.** *Pour le deuxième point du théorème, on peut étendre le résultat à un ensemble dénombrable d'éléments $\{u_{B,\alpha}\}_\alpha$. En effet, pour chaque $u_{B,\alpha}$ nous obtenons que $\mathcal{JH}_{reg}(u_{B,\alpha}, J_B, \sigma)$ est de deuxième catégorie, et par conséquent l'ensemble*

$$\mathcal{JH}_{reg}(\{u_{B,\alpha}\}_\alpha, J_B, \sigma) := \bigcap_\alpha \mathcal{JH}_{reg}(u_{B,\alpha}, J_B, \sigma)$$

*est lui aussi de deuxième catégorie dans $\mathcal{J}^{vert} \times \mathcal{H}$.*

Voici quelques sous-ensembles de $\mathcal{P}_{reg}(\sigma)$ et $\mathcal{JH}_{reg}(u_B, J_B, \sigma)$ que nous réutiliserons plus tard. Fixons $J_B \in \mathcal{J}_B$ et $H \in \mathcal{H}$, on pose :

$$\mathcal{J}^{vert}_{reg}(J_B, H, \sigma) := \{J \in \mathcal{J}^{vert} \mid \text{coker } D^H_u = 0 \ \forall u \in \mathcal{M}^{**}(P, \sigma; J^H_P)\}.$$

Pour un $J \in \mathcal{J}^{vert}$ fixé on pose :

$$\mathcal{V}_{reg}(J, \sigma) := \{(J_B, H) \in \mathcal{J}_B \times \mathcal{H} \mid \text{coker } D^H_u = 0 \ \forall u \in \mathcal{M}^{**}(P, \sigma; J^H_P)\}.$$

L'union disjointe de ces ensembles, au-dessus de $J \in \mathcal{J}^{vert}$, est un sous-ensemble de $\mathcal{P}_{reg}(\sigma)$. Soit $J_B \in \mathcal{J}_{B,reg}(\sigma_B)$, on définit l'ensemble :

$$\mathcal{H}_{reg}(J_B, J, \sigma) := \{H \in \mathcal{H} \mid \text{coker } D^H_u = 0 \ \forall u \in \mathcal{M}^{**}(P, \sigma; J^H_P)\}.$$

Cet ensemble constitue une section dans $\mathcal{V}_{reg}(J, \sigma)$ pour $J_B$ fixé. Maintenant, étant donné un élément $u_B \in \mathcal{M}^*(B, J_B, \sigma_B)$ posons :

$$\mathcal{H}_{reg}(u_B, J_B, J, \sigma) := \{H \in \mathcal{H} \mid \text{coker } D^{H,v}_u = 0 \ \forall u \in \pi^{-1}(u_B)\}.$$

Cet ensemble est un sous-ensemble de $\mathcal{H}_{reg}(J_B, J, \sigma)$. De légères modifications dans la preuve du théorème précédent nous donnent :

**Proposition 2.3.3.** *Si $\omega_B(\sigma_B) \neq 0$, les ensembles $\mathcal{V}_{reg}(J, \sigma)$, $\mathcal{H}_{reg}(J_B, J, \sigma)$ et $\mathcal{H}_{reg}(u_B, J_B, J, \sigma)$ sont de deuxième catégorie. Si $\omega_B(\sigma_B) = 0$, l'ensemble $\mathcal{J}^{vert}_{reg}(J_B, H; \sigma)$ est de deuxième catégorie et de plus ne dépend pas de $H$.*

**Preuve:** Lorsque $\omega_B(\sigma_B) \neq 0$, il suffit alors de remplacer l'application $p^{\mathcal{P}^r}$ dans la preuve du théorème 2.3.1 par les applications $p_{13} \circ p^{\mathcal{P}^r}$ et $p_3 \circ p^{\mathcal{P}^r}$ afin d'obtenir respectivement que $\mathcal{V}_{reg}(J, \sigma)$ et $\mathcal{H}_{reg}(J_B, J, \sigma)$ sont de deuxième catégorie. Pour $\mathcal{H}_{reg}(u_B, J_B, J, \sigma)$ on remplace simplement $p_{23} \circ p^{\mathcal{P}^r}$ par $p_3 \circ p^{\mathcal{P}^r}$.

Lorsque $\omega_B(\sigma_B) = 0$ nous avons vu que les seules perturbations nécessaires, sont celles provenant de $\mathcal{J}^{vert}$, donc en fixant $J_B$ et $H$, d'où le résultat.

L' indépendance provient du fait que la surjectivité de $D^H$ (lorsque nous avons $\omega_B(\sigma_B) = 0$) est équivalente à la surjectivité de l'opérateur :

$$\overline{D}_u : \{\xi \in \Gamma(\Sigma, u^*TP) | \pi_* \xi = \text{constante}\} \longrightarrow \Gamma(\Lambda^{0,1}(\Sigma, u^*TP^v)),$$

donné par la restriction de $D_u$ à $\{\xi \in \Gamma(\Sigma, u^*TP) | \pi_* \xi = \text{constante}\}$. Or, ce nouvel opérateur est indépendant de la connexion choisie. Pour finir, le fait que $D^H$ et $\overline{D}$ ont mêmes noyaux et conoyaux provient de l'exactitude de la suite (2.2.9).

□

**Remarque 2.3.7.** *De par la proposition ci-dessus, nous pouvons réécrire $\mathcal{P}_{reg}(\sigma)$ comme suit :*

$$\bigsqcup_{J \in \mathcal{J}^{vert}} \mathcal{V}_{reg}(J, \sigma) = \bigsqcup_{(J, J_B) \in \mathcal{J}^{vert} \times \mathcal{J}_{B,reg}(\sigma_B)} \mathcal{H}_{reg}(J_B, J, \sigma)$$

*ou par*

$$\bigsqcup_{J_B \in \mathcal{J}_B} \mathcal{J}^{vert}(J_B, \sigma) \times \mathcal{H},$$

*dépendamment de si $\omega_B(\sigma_B)$ n'est pas ou est trivial. De surcroît, lorsque $\omega_B(\sigma_B) \neq 0$, l'ensemble des paires régularisantes pour la fibre au-dessus de $u_B \in \mathcal{M}^*(B, J_B, \sigma_B)$ prend l'expression suivante :*

$$\bigsqcup_{J \in \mathcal{J}^{vert}} \mathcal{H}_{reg}(u_B, J_B, J, \sigma).$$

Le théorème de transversalité nous donne donc en l'occurrence, que pour des paramètres génériques $(J_B, J, H)$, l'application

$$\mathcal{F}_\pi : \mathcal{M}^{**}(P, \sigma, J_P^H) \longrightarrow \mathcal{M}^*(B, \sigma_B; J_B)$$

est une submersion au-dessus d'un nombre dénombrable de points. On peut dès lors se poser la question naturelle à savoir s'il existe des paramètres pour lesquels cette application est partout régulière.

**Définition 2.3.6.** *Pour $J_B$ et $J$ fixés, on dit que $H \in \mathcal{H}$ est paramétrique si $H \in \mathcal{H}_{reg}(J, J_B, \sigma)$.*

La proposition ci-dessous suit instantanément :

**Proposition 2.3.4.** *Supposons $\omega_B(\sigma) \neq 0$. Si $H$ est paramétrique alors $\mathcal{F}_\pi$ est une submersion lisse.*

**Preuve:** Par exactitude de (2.2.9).

□

Nous obtenons donc immédiatement le corollaire suivant :

**Corollaire 2.3.5.** *Soit* $(F,\omega)\hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} (B,\omega_B)$ *une fibration Hamiltonienne et soit* $\tau$ *une forme de couplage sur* $P$. *Supposons que le triplet* $(J_B, J, H) \in \mathcal{P}_{reg}(\tau,\sigma)$ *où* $\sigma \in H_2(P;\mathbb{Z})$ *est une classe effective et primitive qui se projette sur une classe effective primitive non triviale de* $B$. *Si* $H$ *est paramétrique alors* $\mathcal{F}_\pi$ *est une fibration (lisse) localement triviale (après quotient par le groupe des reparamétrisations* $PSL_2(\mathbb{C})$*).*

**Preuve:** Comme $\sigma$ est primitive, l'espace de modules $\mathcal{M}^{**}(P,\sigma;J_P^H)$ est tel que :

$$\mathcal{M}^{**}(P,\sigma;J_P^H)/_{PSL_2(\mathbb{C})} = \mathcal{M}(P,\sigma;J_P^H)/_{PSL_2(\mathbb{C})},$$

est compact. Dès lors $\mathcal{F}_\pi$ est propre. Qui plus est, cette application est lisse et nous obtenons le résultat.

□

Bien que les $H$ paramétriques peuvent induire une structure de fibration entre espaces de modules, il se peut très bien que l'ensemble de ces familles d'Hamiltoniens soit vide. En effet, considérons la fibration Hamiltonienne suivante :

$$\mathbb{C}P^1\hookrightarrow\mathbb{P}(\mathcal{O}(-2)\oplus\mathbb{C}) \xrightarrow{\pi} \mathbb{C}P^2.$$

Dénotons par $L$ la classe d'homologie représentant les droites. Désignons par $E$ l'espace total de cette fibration et soit $L_0 \in H_2(E;\mathbb{Z})$ la classe associée à la section nulle de $\pi$. On remarque que $L = \pi_*(L_0)$. Qui plus est, si $u$ est une courbe holomorphe dans $E$ représentant $L_0$, le fibré (holomorphe) $u^*TE$ induit, est isomorphe à la somme fibrée

$$\mathcal{O}(2)\oplus\mathcal{O}(1)\oplus\mathcal{O}(-2).$$

Un calcul direct nous donne que l'indice de l' operateur vertical doit être $-2$, de sorte que dans ce cas il n'existe pas de $H$ paramétrique.

### 2.3.1. Cobordismes

On s'intéresse à présent, à ce qui se passe lorsqu'on change de paramètre dans $\mathcal{P}_{reg}(\sigma)$. Nous allons voir que étant donné un "bon" chemin de paramètres reliant les triplets réguliers, nous obtenons un cobordisme entre espaces de modules associés. En fait, si $\mathcal{P}_{reg}(\sigma)$ était connexe par arc nous obtiendrions une homotopie (cobordisme trivial). Malheureusement ce n'est pas forcément le cas et nous devons considérer des chemins de paramètres, lisses, au-dessus desquels les espaces de modules peuvent avoir des points singuliers. Fixons $\sigma$ et $\sigma_B$ comme précédemment. Soit

$$\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathcal{P}\,, \quad s \to \gamma(s) := J^H_{P,s} := (J_{B,s}, J_s, H_s), \tag{2.3.13}$$

un chemin lisse dans $\mathcal{P}$. Désignons par $\mathrm{Path}(\mathcal{P})$ l'ensemble de ces chemins. On considérera la restriction au chemin $\gamma$, de l'espace de modules universel :

$$\mathcal{W}^{**}(P,\sigma,\{J^H_{P,s}\}_s) := \gamma^*\mathcal{M}^{**}(P,\sigma;\mathcal{P}) = \Big\{(s,u)\,|\, s\in[0,1],\ u\in\mathcal{M}^{**}(P,\sigma,J^H_{P,s})\Big\}.$$

Cet espace correspond aux zéros de l'opérateur :

$$\overline{\partial} : [0,1]\times\mathcal{B}^{1,p}_P(\sigma) \longrightarrow \mathcal{E}_P(\sigma)\,,\ (s,u)\mapsto \overline{\partial}_{J^H_{P,s}}u,$$

dont la linéarisation en $(s,u)$ est donnée par :

$$\begin{aligned} D_{(s,u)} : \mathbb{R}\Big\langle\frac{\partial}{\partial s}\Big\rangle \oplus \mathcal{X}^{1,p}_{P,u} \quad &\longrightarrow \quad \bigsqcup_{s\in[0,1]} \mathcal{E}^p_{P,u}(J^H_{P,s}) \\ (v,\xi) \quad &\longmapsto \quad D^H_{(u,J^H_{P,s})}\xi + \frac{1}{2}\frac{\partial J^H_{P,s}}{\partial s}\circ du\circ j. \end{aligned} \tag{2.3.14}$$

Pour deux éléments fixés $J^H_{P,0}, J^H_{P,1} \in \mathcal{P}_{reg}(\sigma)$, on peut considérer le sous-ensemble des chemins de $\mathcal{P}$ débutant en $J^H_{P,0}$, et finissant en $J^H_{P,1}$ :

$$\mathcal{P}(J^H_{P,0}, J^H_{P,1}) := \big\{\gamma\in\mathrm{Path}(\mathcal{P})\,|\,\gamma(0)=J^H_{P,0},\ \gamma(1)=J^H_{P,1}\big\}.$$

Le tangent à cet espace consiste en les $[0,1]$-familles d'éléments de $T\mathcal{P}$ s'annulant aux deux bouts. Remarquons aussi qu'un tel chemin $\gamma$ dans $\mathcal{P}$ se projette sur un chemin lisse, $\gamma_B := p_1(\gamma)$, dans $\mathcal{J}_B$. De façon similaire à ce qui précède, on définit les ensembles :

$$\mathrm{Path}(\mathcal{J}_B),\quad \mathcal{J}_B(J_{B,0},J_{B,1}),\ \text{ et }\ \mathcal{W}^*(B,\sigma,\{J_{B,s}\}_s).$$

Le dernier ensemble est donné par les zéros de l'opérateur :

$$\overline{\partial} : [0,1] \times \mathcal{B}_B^{1,p}(\sigma_B) \longrightarrow \mathcal{E}_B(\sigma_B)\ ,\ (s, u_B) \mapsto \overline{\partial}_{J_{B,s}} u,$$

dont la linéarisation en $(s, u_B)$ est donnée par :

$$\begin{aligned} D^B_{(s,u_B)} : \mathbb{R}\left\langle \frac{\partial}{\partial s} \right\rangle \oplus \mathcal{X}^{1,p}_{B,u_B} \quad &\longrightarrow \quad \bigsqcup_{s\in[0,1]} \mathcal{E}^p_{B,u_B}(J_{B,s}) \\ (v,\xi) \quad &\mapsto \quad D^B_{(u,J_{B,s})}\xi + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial s} J_{B,s} \circ du_B \circ j. \end{aligned} \tag{2.3.15}$$

**Définition 2.3.7.** • *Soient $J_{B,0}$ et $J_{B,1}$, deux éléments de $\mathcal{J}_{B,reg}(\sigma_B)$, et soit $\gamma_B$ un chemin dans $\mathcal{J}_B(J_{B,0}, J_{B,1})$. On dit que $\gamma_B$ est régulier si $\gamma_B \pitchfork p^{\mathcal{J}_B}$. On dénotera par $\mathcal{J}_{B,reg}(\sigma_B; J_{B,0}, J_{B,1})$ l'ensemble de ces chemins réguliers.*

- *Soient $J^H_{P,0}$ et $J^H_{P,1}$, deux éléments de $\mathcal{P}_{reg}(\sigma)$ et soit $\gamma \in \mathcal{P}(J^H_{P,0}, J^H_{P,1})$. On dit que $\gamma$ est régulier si $\gamma \pitchfork p^{\mathcal{P}}$. On dénotera par $\mathcal{P}_{reg}(\sigma; J^H_{P,0}, J^H_{P,1})$ l'ensemble de ces chemins réguliers.*

**Remarque 2.3.8.** *En d'autres termes, $\gamma$ est régulier si $D_{(s,u)}$ est surjectif pour tout $(s,u) \in \mathcal{W}^{**}(P, \sigma, \{(J^H_P)_s\}_s)$. Remarquons aussi que si $\gamma$ est régulier alors sa projection $\gamma_B$ est aussi régulière.*

On sait que ([29]) $\mathcal{J}_{B,reg}(\sigma_B; J_{B,0}, J_{B,1})$ est de deuxième catégorie dans l'espace $\mathcal{J}_B(J_{B,0}, J_{B,1})$, et correspond aux chemins dans $\mathcal{J}_B$ pour lesquels l'espace de modules $\mathcal{W}^*(B, \sigma, \{J_{B,s}\}_s)$ est une variété à bord, lisse, orientée de dimension $2n_B + 2c_1(\sigma_B) + 1$ ayant pour frontière :

$$\partial \mathcal{W}^*(B, \sigma_B, \{J_{B,s}\}_s) = \mathcal{M}^*(B, \sigma_B; J_{B,0}) \sqcup -\mathcal{M}^*(B, \sigma_B; J_{B,1}).$$

Nous obtenons le même genre de résultat concernant l'espace $\mathcal{P}_{reg}(\sigma; J^H_{P,0}, J^H_{P,1})$. Précisément :

**Proposition 2.3.6.** *Soient $J^H_{P,0}, J^H_{P,1} \in \mathcal{P}_{reg}(\sigma)$ et soit $\gamma \in \mathcal{P}(J^H_{P,0}, J^H_{P,1})$ . Supposons que $\gamma \in \mathcal{P}_{reg}(\sigma; J^H_{P,0}, J^H_{P,1})$. Alors l'espace de modules $\mathcal{W}^{**}(P, \sigma, \{J^H_{P,s}\}_s)$ est une variété orientée de dimension $2n_P + 2c_1(\sigma) + 1$ dont la frontière est donnée par :*

$$\partial \mathcal{W}^{**}(P, \sigma, \{J^H_{P,s}\}_s) = \mathcal{M}^{**}(P, \sigma; J^H_{P,0}) \sqcup -\mathcal{M}^{**}(P, \sigma; J^H_{P,1}).$$

*De surcroît, l'ensemble $\mathcal{P}_{reg}(\sigma; J^H_{P,0}, J^H_{P,1}) \subset \mathcal{P}(J^H_{P,0}, J^H_{P,1})$ est de deuxième catégorie.*

**Preuve:** Dénotons par $J_{B,0}, J_{B,1} \in \mathcal{J}_B^{reg}$ les projections respectives de $J^H_{P,0}$ et $J^H_{P,1}$ sur $\mathcal{J}_{B,reg}(\sigma_B)$. Pour tout entier $r > 2$, considérons les espaces de modules universels suivants :

$$\mathcal{W}^{**}(P, \sigma, \mathcal{P}^r(J^H_{P,0}, J^H_{P,1})) \quad \text{et} \quad \mathcal{W}^*(B, \sigma_B, \mathcal{J}^r_B(J_{B,0}, J_{B,1})),$$

qui sont respectivement obtenus comme les zéros des sections :

$$\overline{\partial}_P : (s, u, \{J^H_{P,s}\}_s) \mapsto \overline{\partial}_{J^H_{P,s}} u \quad \text{et} \quad \overline{\partial}_B : (s, u_B, \{J_{B,s}\}_s) \mapsto \overline{\partial}_{J_{B,s}} u_B.$$

Ces dernières sont des sections des fibrés de Banach de classe $C^{r-1}$

$$\bigsqcup_{s\in[0,1]} \mathcal{E}^p_P(\sigma, J^H_{P,s}) \quad \text{et} \quad \bigsqcup_{s\in[0,1]} \mathcal{E}^p_B(\sigma_B, J_{B,s}),$$

au-dessus des espaces de Banach

$$\mathcal{B}^{1,p}_P(\sigma) \times \mathcal{P}^r(J^H_{P,0}, J^H_{P,1}) \quad \text{et} \quad \mathcal{B}^{1,p}_B(\sigma_B) \times \mathcal{J}^r_B(J_{B,0}, J_{B,1}).$$

Ces sections commutent avec la projection

$$\begin{aligned} p \times Id_{[0,1]} : \mathcal{B}^{1,p}_P(\sigma) \times \mathcal{P}^r(J^H_{P,0}, J^H_{P,1}) &\longrightarrow \mathcal{B}^{1,p}_B(\sigma_B) \times \mathcal{J}^r_B(J_{B,0}, J_{B,1}) \\ (s, u, \{J^H_{P,s}\}_s) &\mapsto (s, \pi(u), \{J_{B,s}\}_s), \end{aligned}$$

et nous obtenons ainsi la suite exacte :

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \quad \ker \widetilde{D}^v_{(s,u,J^H_{P,s})} &\longrightarrow \ker \widetilde{D}_{(s,u,J^H_{P,s})} \longrightarrow \ker \widetilde{D}^B_{(s,u_B,J_{B,s})} \longrightarrow \\ \longrightarrow \quad \operatorname{coker} \widetilde{D}^v_{(s,u,(J^H_P)_s)} &\longrightarrow \operatorname{coker} \widetilde{D}_{(s,u,J^H_{P,s})} \longrightarrow \operatorname{coker} \widetilde{D}^B_{(s,u_B,J_{B,s})} \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

En argumentant comme dans le théorème 2.3.1 nous avons que coker $\widetilde{D}^v_{(s,u,J^H_{P,s}))}$ et coker $\widetilde{D}^B_{(s,u_B,J_{B,s})}$ s'annulent. Le reste de la preuve est obtenue en imitant la démonstration du théorème 2.3.1 et nous l'omettons.

□

Dans ce qui suit on considère ce qui se passe dès que l'on change de paire régularisante pour une fibre donnée. Soit $J_B$ une structure complexe régulière et soit $u_B \in \mathcal{M}^*(B, \sigma_B; J_B)$. Désignons par Path$(\mathcal{J}^{vert} \times \mathcal{H})$ les chemins lisses dans

$\mathcal{J}^{vert} \times \mathcal{H}$. Considérons $(J,H)_0 := (J_0, H_0)$ et $(J,H)_1 := (J_1, H_1)$ des éléments de $\mathcal{JH}_{reg}(u_B, J_B, \sigma)$. On définit :

$$\mathcal{JH}((J,H)_0, (J,H)_1) := \{\gamma \in \mathrm{Path}(\mathcal{J}^{vert} \times \mathcal{H}) \,|\, \gamma(0) = (J,H)_0,\ \gamma(1) = (J,H)_1\}.$$

Etant donné $\gamma \in \mathcal{JH}((J,H)_0, (J,H)_1)$ on pose

$$\mathcal{W}(\pi^{-1}(u_B), J_B, \sigma, \{(J,H)_s\}_s) := \gamma^*\pi^{-1}(u_B).$$

**Définition 2.3.8.** *Soient $(J,H)_0$ et $(J,H)_1$, deux éléments de $\mathcal{JH}_{reg}(u_B, J_B, \sigma)$. Soit $\gamma \in \mathcal{JH}((J,H)_0, (J,H)_1)$. On dira que $\gamma$ est régulier si $\gamma$ intersecte transversalement l'application $p_{23} \circ p^{\mathcal{P}}$ restreinte à $(\mathcal{F}_\pi^{univ})^{-1}(u_B, J_B)$. L'ensemble de ces chemins réguliers sera dénoté par $\mathcal{JH}_{reg}(J_B, u_B, \sigma; (J,H)_0, (J,H)_1)$.*

La proposition suivante est démontrée de la même façon que la précédente.

**Proposition 2.3.7.** *Fixons $J_B$ régulier et soit $u_B \in \mathcal{M}^*(B, \sigma_B; J_B)$. Soient $(J,H)_0, (J,H)_1 \in \mathcal{JH}_{reg}(J_B, u_B, \sigma)$ et considérons un chemin régulier $\gamma$ entre les paires $(J,H)_0$ et $(J,H)_1$. Supposons $\gamma \in \mathcal{P}_{reg}(\sigma; (J_P^H)_0, (J_P^H)_1)$. Alors, l'espace de modules $\mathcal{W}(\pi^{-1}(u_B), J_B, \sigma, \{(J,H)_s\}_s)$ est une variété à bord, orientée, de dimension $2n_F + 2c_1^v(\sigma) + 1$ dont la frontière :*

$$\partial\mathcal{W}(\pi^{-1}(u_B), J_B, \sigma, \{(J,H)_s\}_s),$$

*est donnée explicitement par :*

$$\pi^{-1}(u_B) \cap \mathcal{M}^{**}(P, \sigma; (J_P^H)_0) \sqcup -\pi^{-1}(u_B) \cap \mathcal{M}^{**}(P, \sigma; (J_P^H)_1).$$

*Qui plus est, l'ensemble $\mathcal{JH}_{reg}(J_B, u_B, \sigma; (J,H)_0, (J,H)_1)$ est de deuxième catégorie dans $\mathcal{JH}((J,H)_0, (J,H)_1)$.*

**Preuve:** La même que dans la proposition 2.3.6, en supposant en plus que le chemin dans $\mathcal{J}_B$ est constant. Nous obtenons la même suite exacte dont les trois derniers termes disparaissent. On termine en argumentant comme dans le point ii) du théorème 2.3.1.

□

# Chapitre 3

## THÉORÈMES DE STRUCTURE

Nous avons montré dans le chapitre précédent que l'espace de modules $\mathcal{M}^{**}(P, \sigma; J_P^H)$ est une variété lisse orientée. On note que le groupe des bi-holomorphismes du domaine $S^2$, plus précisément $PSL_2(\mathbb{C})$, agit de façon libre sur l'espace de modules en question, la raison étant que l'on a exclu les revêtements multiples. Nous concluons donc que le quotient $\mathcal{M}^{**}(P, \sigma; J_P^H)/PSL_2(\mathbb{C})$ est encore une variété, cependant, nous ne pouvons pas conclure que cette dernière est compacte. Toutefois, sa compactification au sens de Gromov ([8], [29], [13]...), $\overline{\mathcal{M}}(P, \sigma; J_P^H)$, est bien comprise, et peut être vue comme un espace stratifié par des applications stables à équivalence près ([18]). Lorsque les strates en question ne possèdent pas d'automorphismes, elles sont alors munies d'une structure de variété et ceci pour un choix générique de structure complexe fibrée. C'est ce que nous allons montrer dans ce chapitre. Nous commençons par donner la description de la compactification mentionnée plus haut, puis nous démontrerons la transversalité nécessaire afin d'obtenir la structure de variété mentionnée.

### 3.1. Compactification

Nous montrons que le processus de compactification est essentiellement le même que dans le cas de la convergence des graphes de courbes pseudo-holomorphes. On commence tout d'abord par rappeler la notion d'énergie qui intervient lors du processus de compactification.

### 3.1.1. Identités d'énergie

Soit $J_B \in \mathcal{J}(B, \omega_B)$, et $J \in \mathcal{J}^{Vert}(P, \pi)$. Étant donnée $u_B \in C^\infty(S^2, B)$, son énergie $E_B(u_B)$ est définie comme étant la norme de Dirichlet de $u_B$ respectivement à la métrique $g_{J_B}$ et une forme de volume fixée sur $S^2$ :

$$E_B(u_B) := \frac{1}{2}\int_{S^2} \|du_B\|^2_{g_{J_B}} dvol_{S^2}. \tag{3.1.1}$$

Il est facile de voir que lorsque $u_B$ est $J_B$-holomorphe, cette fonctionnelle se réduit à une quantité purement topologique ([**29**]) :

$$E_B(u_B) = \int_{S^2} u_B^* \omega_B = \omega_B(u_{B*}[S^2]). \tag{3.1.2}$$

Maintenant, fixons une forme de couplage $\tau$ sur $P$ et soit $J_P$ la structure fibrée par rapport à $\tau$, et induite par $J_B$ et $J$. Considérons $u \in C^\infty(S^2, P)$, alors son **énergie verticale** est la fonctionnelle sur $C^\infty(S^2, P)$ définie par :

$$E^{vert}(u) := \frac{1}{2}\int_{S^2} \|(du)^v\|^2_{g_J} dvol_{S^2}. \tag{3.1.3}$$

Toutefois, cette quantité dépend de la connexion Hamiltonienne choisie. Explicitons cette dépendance :

**Lemme 3.1.1.** *Soit $\tau$ et $J_P$ comme plus haut, et soit $R$ la courbure symplectique associée à $\tau$. Pour toute courbe $J_P$-holomorphe $u : S^2 \longrightarrow P$ nous avons :*

$$E^{vert}(u) = \int_{S^2} u^*\tau + \int_{S^2} R(u) dvol_{S^2}. \tag{3.1.4}$$

**Preuve:** Ceci dérive de l'identité :

$$\tau(du, J_P du) = \omega(du^v, J du^v) - R(du^h, J_P du^h).$$

□

Bien que le terme à droite de l'équation (3.1.4) varie selon la courbe, nous pouvons borner supérieurement cette énergie. Pour cela, il suffit de considérer la norme de Hofer de la courbure :

$$\|R\| := \int_B \left( \max_{p \in F_b} R(p) - \min_{p \in F_b} R(p) \right) \omega_B^{n_B}.$$

Cette norme est finie par compacité de $P$ et donc pour toute courbe $J_P$-holomorphe $u$ nous avons :

$$E^{vert}(u) \leq \int_{S^2} u^*\tau + \|R\|. \tag{3.1.5}$$

Pour une application $u \in C^\infty(S^2, P)$ on définit **l'énergie totale** comme étant

$$E(u) := \frac{1}{2}\int_{S^2} \|du\|^2_{g_{J_P^H}} dvol_{S^2} = E^{vert}(u) + E_B(u_B).$$

Ainsi, pour toute courbe holomorphe $u$, l'équation (3.1.5) fournit l'inégalité suivante :

$$E(u) \leq \int_{S^2} u^*\tau + \|R\| + \int_{S^2} u_B^*\omega_B. \tag{3.1.6}$$

**Remarque 3.1.1.** *On remarque que changer la connexion par déformation exacte de la forme de couplage laisse le premier terme du membre de droite de l'équation (3.1.4) inchangé. Néanmoins, le second terme se transforme pour donner :*

$$\int_{S^2} R_H(u) dvol_{S^2}.$$

*Remarquons aussi que si nous remplaçons la condition de compatibilité pour $J$ et $J_B$ par la condition plus faible de maîtrisation, rien ne change en ce qui concerne l'exposition ci-dessus.*

Le théorème de compacité de Gromov nous assure qu'une suite d'applications pseudo-holomorphes ayant énergie bornée doit converger vers une application stable (avec $l$ points marqués), notion que nous définirons dans les sections suivantes. Ce processus limite pour les applications de genre 0, initialement mis en évidence dans le cadre symplectique par Gromov ([8]), est couramment appelé **convergence de Gromov** (Gromov-Uhlenbeck pour les courbes de genre plus grand [38]) que nous ne définirons pas. Une bonne référence est le Chapitre 5 de [29].

**Théorème 3.1.2.** (Compacité de Gromov). *Soit $P$ une variété symplectique compacte et soit $J_k$ une suite de structures presque complexes tames convergeant vers $J$ dans la topologie $C^\infty$. Soit $u_k : S^2 \longrightarrow P$, une suite d'applications $J_k$-holomorphes dans $P$ telles que $\sup_k E(u_k) < \infty$ et soit $\mathbf{x}_k := (x_{1,k}, ..., x_{l,k})$ une suite de points distincts sur $S^2$. Alors la paire $(u_k, \mathbf{x}_k)$ possède une sous-suite qui* *converge (au sens de Gromov) vers une application stable $J$-holomorphe avec $l$ points marqués.*

En particulier, dans notre situation, c'est-à-dire lorsque $P$ est une fibration Hamiltonienne comme auparavant, nous déduisons le résultat suivant :

**Lemme 3.1.3.** *Soit $(F, \omega) \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} (B, \omega_B)$ une fibration Hamiltonienne et soit $\tau$ une forme de couplage sur $P$. Soit $J_P^H$ une structure complexe fibrée sur $P$ donnée par le triplet $(J_B, J, H)$ et soit aussi $\sigma \in H_2(P; \mathbb{Z})$. Alors toute suite de courbes simples $J_P^H$-holomorphes représentant $\sigma$, possède une sous-suite convergeant vers une courbe stable.*

**Preuve:** Cela découle directement du théorème 3.1.2 ainsi que de la borne donnée par (3.1.6).

□

### 3.1.2. Applications stables holomorphes

Nous décrivons à présent les applications holomorphes stables, dans le sens de Kontsevich [**18**], qui apparaissent naturellement comme limites géométriques de suite d'applications pseudo-holomorphes avec points marqués. Commençons par rappeler de façon succinte la définition de l'espace de Deligne-Mumford pour la 2-sphère.

**L'espace de Deligne-Mumford.** L'espace de Deligne-Mumford, où plus justement Grothendick-Knudsen dans ce cas particulier, $\mathcal{M}_{0,l}$ est par définition l'ensemble des surfaces de Riemann de genre 0 (ou courbes de genre 0), munies de $l$ points marqués distincts à difféomorphisme préservant l'orientation près. En d'autres termes, si $\mathcal{J}(S^2)$ désigne l'ensemble des structures conformes sur $S^2$, alors

$$\mathcal{M}_{0,l} := \frac{\mathcal{J}(S^2) \times ((S^2)^l - \Delta)}{\mathrm{Diff}^+(S^2)},$$

où $\Delta \subset (S^2)^l$ désigne ici la grosse diagonale dans $(S^2)^l$.

La sphère $S^2$ ne possède qu'une seule structure conforme, à difféomorphisme près, que nous notons $j_0$, et qui coïncide avec la structure complexe standard sur

$\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Le groupe $PSL_2(\mathbb{C})$ fixe justement cette structure. Comme de surcroît $PSL_2(\mathbb{C})$ est 3-transitif, nous obtenons que :

$$\mathcal{M}_{0,l} = \{(S^2, j_0, \infty, 0, 1)\} \times ((S^2 - \{0, 1, \infty\})^{l-3} - \Delta),$$

si $l \geq 3$, et sinon nous posons :

$$\mathcal{M}_{0,0} = \{(S^2, j_0)\}, \quad \mathcal{M}_{0,1} = \{(S^2, j_0, \infty)\}, \quad \mathcal{M}_{0,2} = \{(S^2, j_0, \infty, 0)\}.$$

**Remarque 3.1.2.** *Désormais, nous omettrons de mentionner $j_0$. Il est aussi à noter que cet espace correspond à l'espace de Teichmüller $\mathcal{T}_{0,l}$.*

Observons dans ces trois derniers espaces, la présence de groupes non finis d'automorphismes relativement à l'action de $PSL_2(\mathbb{C})$.

**Définition 3.1.1.** *Une courbe de genre 0 avec $l$ points marqués, $(S^2, j, x_1, ..., x_l)$ est dite* ***stable*** *si $l \geq 3$.*

Pour $l \geq 3$, la compactification de l'espace de Deligne-Mumford correspond aux classes d'équivalence de surfaces (courbes) nodales de genre (arithmétique) 0 avec $l$ points marqués, qui sont stables. Nous précisons.

**Définition 3.1.2.** (*Courbes nodales de genre 0 avec $l$ points marqués*) *Une courbe nodale de genre 0 avec $l$ points marqués, est un uplet $(\Sigma, j, x_1, ..., x_l)$ tel que :*

1) *$(\Sigma, j)$ est une surface connexe avec des singularités normales désignées par $Sing(\Sigma)$ n'admettant aucune auto-intersection comme singularité. Chaque composante $(\Sigma_i, j_i)$ de $(\Sigma, j)$ est une courbe de genre 0. De surcroît, $(\Sigma, j)$ n'admet aucun cycle (aucun collier de sphères).*

2) *$x_1, ..., x_l$ désignent $l$ points distincts sur $\Sigma$, qui ne font pas partie de l'ensemble des singularités.*

Voici quelques explications sur cette définition. Nous en profiterons pour introduire de nouvelles notations. Désignons par $\Sigma_i$ la $i$-ème composante de $\Sigma$. La normalisation de $(\Sigma, j)$ est par définition la réunion disjointe :

$$\mathcal{N}(\Sigma, j) := \bigsqcup_{i \in I} (\Sigma_i, j_i).$$

Notons que chaque point nodal $y$ appartient exactement à deux composantes, disons $\Sigma_i$ et $\Sigma_j$, et que, étant donnés $i$ et $j$ tels que leurs composantes correspondantes s'intersectent, il existe un unique élément $y \in \mathrm{Sing}(\Sigma)$ tel que :

$$\Sigma_i \cap \Sigma_j = \{y\}.$$

Nous dénoterons par $y_{ij} \in \Sigma_i$ et $y_{ji} \in \Sigma_j$ les points correspondants dans la normalisation $\mathcal{N}(\Sigma, j)$.

Nous écrirons $iEj$ si les $i$-ème et $j$-ème composantes de $\Sigma$ s'intersectent.

**Remarque 3.1.3.** *Afin de mettre en valeur les relations d'incidence, si $I$ indice les composantes de $\Sigma$, nous écrirons parfois $(\Sigma, j, x_1, ..., x_l)$ au niveau de sa normalisation :*

$$(\cup_{i\in I}(\Sigma_i, j_i), \{y_{ij}\}_{\{iEj \mid i,j\in I\}}, x_1, ..., x_l),$$

*ou plus simplement $(\Sigma, \mathbf{y}, \mathbf{x})$. Il nous arrivera aussi d'utiliser la notation* $\mathrm{j}$ *pour mettre l'accent sur la structure conforme.*

**Définition 3.1.3.** *Une courbe nodale (de genre 0 avec $l$ points marqués)* $\mathrm{j}$ *est stable ssi toutes ses composantes sont stables.*

Nous introduisons une relation d'équivalence entre les courbes nodales.

**Définition 3.1.4.** *Deux courbes nodales :*

$$\mathrm{j} = (\Sigma, j, x_1, ..., x_l) \quad et \quad \mathrm{j}' = (\Sigma', j', x_1', ..., x_l')$$

*sont dites équivalentes, ou isomorphes, s'il existe un homéomorphisme $\varphi : \Sigma \longrightarrow \Sigma'$ se relevant en un $j, j'$-biholomorphisme*

$$\mathcal{N}(\varphi) : \mathcal{N}(\Sigma, j) \longrightarrow \mathcal{N}(\Sigma', j'),$$

*tel que $\varphi(x_i) = x_i'$. On dénotera par $[\Sigma, j, x_1, ..., x_l,]$ la classe d'isomorphisme de $(\Sigma, j, x_1, ..., x_l)$.*

Désignons par $\mathrm{Aut}(\Sigma, j, x_1, ..., x_l)$ ou encore $\mathrm{Aut}(\mathrm{j})$ le sous-groupe d'isotropie de la courbe nodale en question, sous l'action des isomorphismes de courbes nodales. Alors, $\mathrm{Aut}(\mathrm{j})$ est fini si est seulement si $\mathrm{j}$ est stable.

**Remarque 3.1.4.** *Étant donné que la sphère ne possède qu'une unique structure conforme à difféomorphisme près, nous omettrons le $j$ dans la notation. Aussi* *pour simplifier, nous écrirons parfois (en l'occurrence dans le chapitre sur le recollement)* **j** *ou* [**j**] *pour désigner indifféremment* $[\Sigma, x_1, ..., x_l,]$.

Chaque courbe avec $l$ points marqués est représentée par un arbre avec tiges noté $\mathcal{S} = (T, D)$ donné par :

1) chaque sommet correspond à une composante $\Sigma_i$ de $(\Sigma, j)$. Nous désignerons par $V$ ou plus souvent $I$, l'ensemble de tous les sommets.

2) pour chaque $y \in \mathrm{Sing}(\Sigma)$ on associe une arête entre les sommets satisfaisant $\Sigma_i \cap \Sigma_j = \{y\}$. Par la suite, $E$ désignera l'ensemble de toutes les arêtes. De surcroît, nous écrirons $iEj$ pour dire que $\Sigma_i \cap \Sigma_j$ est non-vide.

3) considérons l'application $D : \{1, ..., l\} \longrightarrow I$ assignant à chaque $s$ l'indice de la composante sur laquelle le point marqué $x_s$ réside. Dès lors, l'ensemble des tiges attachées au sommet $i \in I$ est donné par $D^{-1}(i)$ et représente ainsi tous les points marqués reposant sur la $i$-ème composante de $\Sigma$.

**Définition 3.1.5.** *On appelle $\mathcal{S}$ comme ci-dessus une* **donnée de strate**. *Si de plus $\mathcal{S}$ est telle que chaque sommet possède au moins trois valences, où les tiges comptent aussi pour une valence, alors $\mathcal{S}$ est dite* **stable**.

**Remarque 3.1.5.** *Pour amplifier le fait qu'une certaine donnée de strate n'est pas stable nous utiliserons parfois la notation $\mathcal{S}^u$ à la place de $\mathcal{S}$.*

On observe aisément qu'une courbe nodale **j** avec $l$-points marqués est stable si et seulement la donnée de strate correspondante est stable.

**Définition 3.1.6.** *Soit $\mathcal{S} = (T, D)$ une donnée de strate. Supposons que les sommets de $T$ sont indicés par $I$ et désignons par $\{v_i\}_{i \in I}$ ces sommets. Soient $\{e_{ij}\}_{\{iEj|i,j \in I\}}$ l'ensemble des arêtes de $T$, tels que $e_{ij} = e_{ji}$. Le groupe Aut($\mathcal{S}$) consiste en les isomorphismes d'arbre $\gamma : T \longrightarrow T$ préservant les tiges, i.e*

$$\gamma(v_i) = v_{\gamma(i)} \quad et \quad \gamma(e_{ij}) = e_{\gamma(i)\gamma(j)}$$

*tels que*

$$\gamma(D(k)) = D(k),$$

*où $k \in \{1, ..., l\}$ est l'indice du $k$-ième point marqué.*

Pour une donnée de strate stable, $\mathrm{Aut}(\mathcal{S})$ est fini et même égale à l'identité dans la présente situation (genre arithmétique 0).

Pour une donnée de strate fixée $\mathcal{S}$ on dénotera par $\mathcal{M}_{\mathcal{S}}$ l'ensemble des courbes nodales représentées par $\mathcal{S}$, à équivalence près. Le résultat suivant est standard ([**29**], appendice D.).

**Lemme 3.1.4.** *Soit $\mathcal{S}$ une donnée de strate stable alors $\mathcal{M}_{\mathcal{S}}$ est une variété lisse.*

**Remarque 3.1.6.** *Ce résultat est spécifique aux surfaces de genre 0. En genre supérieur, à cause de la présence de groupes d'automorphismes finis, nous obtenons une structure d'orbi-variété lisse à la place.*

Plus généralement, la compactification de l'espace de Deligne-Mumford $\overline{\mathcal{M}}_{0,l}$ est stratifiée par les espaces $\mathcal{M}_{\mathcal{S}}$ lorsque $\mathcal{S}$ est stable, qui sont alors des strates de codimension 2 résultat provenant de Grothendick et Knudsen ([**29**]). De plus, l'ensemble des strates stables $\mathcal{D}_{0,l}$ est fini à cause de la condition de stabilité. Nous avons aussi un ordre partiel sur $\mathcal{D}_{0,l}$. Précisément, pour $\mathcal{S} = (T, D)$ on peut construire $\mathcal{S}' = (T', D')$ en enlevant une arête $e_{ij} = e_{ji}$ de $T$ entre les sommets $v_i$ et $v_j$ et en identifiant $v_i$ et $v_j$ à un nouveau sommet $v$. Alors $D'(k) = v'$ si $D(k) = v_i$ ou $D(k) = v_j$. On pose alors $\mathcal{S} < \mathcal{S}'$. Plus généralement, si $\mathcal{S}'$ est obtenu de $\mathcal{S}$ par plusieurs contractions de ce genre on dit que $\mathcal{S}$ est plus petite que $\mathcal{S}'$ et on note $\mathcal{S} < \mathcal{S}'$.

**Application holomorphes stables.** Dans ce qui suit, nous considérons les applications ayant comme domaine des courbes nodales de genre 0 avec $l$ points marqués. Le but de cette exposition est essentiellement d'introduire des notations et sera donc essentiellement descriptive. Nous commençons par le cas où il n'y a pas de singularité, c'est à dire nous décrivons à présent l'espace de modules des applications pseudo-holomorphes munies de $l$ points marqués. Le point de vu adopté se veut introductif pour le chapitre sur le recollement (gluing).

Soit $\mathbf{j} = (S^2, j, x_1, ..., x_l) \in \mathcal{M}_{0,l}$. Soient $\sigma \neq 0 \in H_2(P, \mathbb{Z})$ et $J_P$ une structure presque complexe ($\omega_P$-compatible ou $\omega_P$-tame). On définit

$$\mathcal{B}_{P\mathbf{j}}(\sigma) := \{(u, x_1, ..., x_l) | u \in \mathcal{B}_P(\sigma) \text{ } et \text{ } \mathbf{j} = (S^2, x_1, ..., x_l)\}.$$

Comme les points marqués sont fixés, et pour être plus précis, la paramétrisation du domaine est fixée par $\mathbf{j}$ à équivalence près, un élément de $\mathcal{B}_{P\mathbf{j}}(\sigma)$ sera simplement noté $u$. Posons alors

$$\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathbf{j}}(P,\sigma,J_P) := \{u \in \mathcal{B}_{P\mathbf{j}}(\sigma) \mid \overline{\partial}_{\mathbf{j},J_P}u = 0\}.$$

Ici, $2\overline{\partial}_{\mathbf{j},J} := d + J \circ d \circ j_0$ et donc le $\mathbf{j}$ est superflu. Nous l'oublierons dès à présent.

**Remarque 3.1.7.** *Cette notation est quelque peu ambigüe vis-à-vis du deuxième chapitre. En effet, si nous n'avons aucun point marqué, l'espace de modules $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathbf{j}}(P,\sigma,J_P)$ coïncide avec $\mathcal{M}(P,A,J_P^H)$ défini dans le chapitre précédent. Nous adopterons dès lors la convention de* [**29**]*, c'est-à-dire que s'il n'y a pas d'indice en bas du $\mathcal{M}$ alors nous dénoterons l'espace de modules paramétré sans le tilde.*

Nous avons que $\mathrm{Aut}(\mathbf{j})$ agit sur ces espaces de modules et soit l'espace des orbites correspondant :

$$\mathcal{M}_{\mathbf{j}}(P,\sigma,J_P) := \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathbf{j}}(P,\sigma,J_P)/\mathrm{Aut}(\mathbf{j}).$$

**Remarque 3.1.8.** *Remarquons que pour $l = 0$, on obtient l'espace des applications $J_P$ holomorphes non paramétrées : $\mathcal{M}(P,\sigma,J_P)/PSL_2(\mathbb{C})$.*

Pour un élément $u \in \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathbf{j}}(P,\sigma,J_P)$, le groupe d'isotropie relativement à l'action de $\mathrm{Aut}(\mathbf{j})$, encore appelé groupe d'automorphisme sera noté $\mathrm{Aut}(u,\mathbf{j})$.

**Remarque 3.1.9.** *Notons que cette action n'est pas forcément libre. Par exemple, considérons $\mathcal{M}_{\mathbf{j}_0}(S^2,[S^2],j_0)$ où $\mathbf{j}_0 = (S^2,j_0) \in \mathcal{M}_{0,0}$ et $u : z \mapsto z^2$. Cependant, le groupe d'isotropie est toujours fini car $\sigma \neq 0$, et si $l \geq 3$ l'action de $Aut(\mathbf{j})$ est libre (car dans ce cas $Aut(\mathbf{j}) = id$), de même que si on se restreint aux applications simples.*

En utilisant les notations définies ci-dessus nous posons :

$$\widetilde{\mathcal{M}}_{0,l}(P,\sigma,J_P) := \bigsqcup_{\mathbf{j}\in\mathcal{M}_{0,l}} \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathbf{j}}(P,\sigma,J_P).$$

Maintenant, nous avons une relation d'équivalence sur ces applications, analogue à celle pour les courbes : $(u_1,\mathbf{j}_1) \sim (u_2,\mathbf{j}_2)$ s'il existe un isomorphisme $\varphi : \mathbf{j}_1 \longrightarrow \mathbf{j}_2$ tel que $\varphi^* u_1 = u_2$.

**Remarque 3.1.10.** *En réalité, en choisissant* $\mathbf{j} \in \mathcal{M}_{0,l}$ *nous avons déjà identifié toute une classe d'équivalence de surfaces de Riemann avec l points marqués. Il ne reste donc plus qu'à quotienter par* $Aut(\mathbf{j})$.

Le quotient par cette relation est noté $\mathcal{M}_{0,l}(P, \sigma, J_P)$. On voit par construction que cet espace coïncide avec $\mathcal{M}(P, \sigma, J_P) \times_{PSL_2(\mathbb{C})} (S^2)^l - \Delta$, où l'action de $PSL_2(\mathbb{C})$ est donnée par :

$$g.(u, x_1, ..., x_l) := (g^*u, g(x_1), ..., g(x_l)),$$

et qui est génériquement une variété ouverte lisse si l'on se restreint aux applications simples.

La compactification de cet espace de modules $\overline{\mathcal{M}}_{0,l}(P, \sigma, J_P)$, est, par un résultat essentiellement dû à Kontsevich [18], composé des applications holomorphes stables non-paramétrées.

**Définition 3.1.7.** *Une* ***application stable*** $J_P^H$***-holomorphe*** *(ou application stable, ou encore courbe stable) dans P, de genre 0, et avec l points marqués, est un uplet,* $(\Sigma, j, u, x_1, ..., x_l)$, *tel que :*

(i) $(\Sigma, j, x_1, ..., x_l)$ *est une une surface nodale de genre 0, avec l points marqués.*

(ii) $u$ *est une application* $J_P^H$*-holomorphe allant de* $\Sigma$ *vers* $P$.

(iii) (***stabilité***) *Le groupe*

$$Aut(\Sigma, j, u, x_1, ..., x_l) := \{\varphi \in Aut(\Sigma, j, x_1, ..., x_l) \mid \varphi^* f = f\},$$

*est fini.*

L'application $u$ dans ii) doit être vue comme une application $J_P^H$-holomorphe, de domaine la normalisation de $\Sigma$, et qui satisfait les identifications nécessaires aux points nodaux. Ainsi, $u$ s'écrit comme un uplet $\{u_i\}_{i \in I}$ tel que :

$$\begin{cases} \overline{\partial}_{j_i, J_P^H} u_i = 0 & \forall i \in I \\ u_i(y_{ij}) = u_j(y_{ji}) = u(y) & \text{dès que } \Sigma_i \cap \Sigma_j = \{y\} \neq \emptyset. \end{cases} \tag{3.1.7}$$

Afin de mettre en valeur les relations d'incidence nous écrirons parfois l'élément $(\Sigma, j, u, x_1, ..., x_l)$ au niveau de sa normalisation :

$$(\{\Sigma_i\}_{i\in I}, \{j_i\}_{i\in I}, \{u_i\}_{i\in I}, \{y_{ij}\}_{\{iEj \mid i,j\in I\}}, x_1, ..., x_l).$$

Il nous arrivera aussi d'utiliser la notation $(\mathbf{u}, \mathbf{j})$ pour entre autre simplifier les notations.

On peut définir une relation d'équivalence sur l'ensemble des applications ayant pour domaine des courbes nodales avec points marqués :

**Définition 3.1.8.** *On dira que $(\Sigma, j, u, x_1, ..., x_l)$ est équivalente ou isomorphe à $(\Sigma', j', u', x_1', ..., x_l')$ s'il existe un isomorphisme de courbes nodales avec points marqués entre $(\Sigma, j, x_1, ..., x_l)$ et $(\Sigma', j', x_1', ..., x_l')$, qui satisfait la condition $\varphi^* u = u'$. On dénotera par $[\Sigma, j, u, x_1, ..., x_l]$ la classe d'isomorphisme de $(\Sigma, j, u, x_1, ..., x_l)$.*

La condition de stabilité signifie que toute composante $\Sigma_i$ telle que $u_i$ est constante est équipée d'au moins trois points spéciaux (ici un point spécial réfère à soit un point marqué soit un point nodal).

**Définition 3.1.9.** *Soit $J_P^H$ une structure presque complexe sur $P$. On dénotera par $\overline{\mathcal{M}}_{0,l}(P, \sigma, J_P^H)$, l'ensemble de toutes les classes d'isomorphisme $[\Sigma, j, u, x_1, ..., x_l]$ d'applications stables (rationnelles) relativement à $J_P^H$, munies de $l$ points marqués et satisfaisant la condition topologique $[u(\Sigma)] = \sigma \in H_2(P; \mathbb{Z})$.*

Comme déjà mentionné, la topologie de $\overline{\mathcal{M}}_{0,l}(P, \sigma, J_P^H)$ est celle de la convergence de Gromov-Uhlenbeck ([**29**],[**38**]). Autrement dit, cet espace coïncide avec la compactification de *Gromov* de $\mathcal{M}_{0,l}(P, \sigma, J_P^H)$ et contient toutes les limites géométriques d'applications $J_P^H$-holomorphes dans $P$, avec $l$ points marqués, représentant la classe $A$.

Notons qu'il existe une application naturelle entre $\overline{\mathcal{M}}_{0,l}(P, \sigma, J_P^H)$ et $\overline{\mathcal{M}}_{0,l}$ appelée **application oubli**. Cette application est donnée comme suit :

$$\mathcal{F} : \overline{\mathcal{M}}_{0,l}(P, \sigma, J_P^H) \longrightarrow \overline{\mathcal{M}}_{0,l}, \quad [\mathbf{u}, \mathrm{j}] \mapsto \mathrm{st}(\mathrm{j}),$$

où st désigne la procédure de stabilisation consistant à contracter toute composante de j n'étant pas stable après oubli de l'application $u$. Bien entendu, décrite comme telle cette application n'est bien définie que lorsque $l \geq 3$. Toutefois, nous avons aussi une application $\mathcal{F}_{map}$ définie exactement de la même façon si ce n'est que l'on ne stabilise pas la courbe nodale résultante.

**Données de strates pour les applications stables.** Rappelons que le domaine d'une application stable possède une représentation en terme d'arbre connexe avec des tiges. Plus généralement, à toute application stable avec $l$ points marqués $(\Sigma, j, u, x_1, ..., x_l)$, on associe un triplet

$$\mathcal{S} = (T, D, \vec{\sigma})$$

tel que

1) $(T, D)$ est l'arbre avec tiges qui représente $(\Sigma, j, x_1, ..., x_l)$.
2) $\vec{\sigma} = \sum_{i \in I} \sigma_i$ où $\sigma_i := u_{i*}[\Sigma_i]$, et $I$ indice les sommets de $T$.
3) tout $i \in I$ tel que $\sigma_i = 0$, le sommet correspondant $v_i$ possède au moins trois valences.

**Remarque 3.1.11.** *Soulignons que dans ce qui va suivre nous allons parfois omettre la condition de stabilité. Dans ce cas précis, une application $J_P^H$-holomorphe représentée par $\mathcal{S}$, sera comme auparavant une application de domaine une surface de Riemann nodale mais dont au moins une des composantes est constante avec moins de trois points spéciaux. Notons aussi que pour $\mathcal{S} = (T, D, \vec{\sigma})$, la paire $(T, D)$ nous donne la représentation en terme d'arbre du domaine de l'application nodale qui en général n'est pas stable.*

Ci-dessous nous donnons la définition de donnée de strate. Ici, nous ne supposerons pas forcément la condition de stabilité.

**Définition 3.1.10.** *Soit un triplet $\mathcal{S} = (T, D, \vec{\sigma})$ comme ci-dessus. On dira que $\mathcal{S}$ est une* **donnée de strate.** *Un donnée de strate est dite stable si elle satisfait la condition de stabilité.*

Une strate de $\overline{\mathcal{M}}_{0,l}(P, \sigma, J_P^H)$ consiste en l'ensemble des classes d'isomorphisme d'applications stables ayant $\mathcal{S}$ comme description, et est désignée par $\mathcal{M}_{\mathcal{S}}(P, J_P^H)$. On peut voir que le nombre de strates de $\overline{\mathcal{M}}_{0,l}(P, \sigma, J_P^H)$ est fini. De plus, nous avons, comme dans le cas de Deligne-Mumford, un ordre partiel sur ces données de strates obtenu par contraction des arêtes, et où la classe d'homologie du nouveau sommet obtenu est donnée par la somme des deux sommets que l'on contracte.

**Remarque 3.1.12.** *L'application oubli $\mathcal{F}_{map}$ envoie $\mathcal{S} = (T, D, \vec{\sigma})$ sur la donnée $\mathcal{F}_{map}(\mathcal{S}) = (T, D)$, et nous écrivons*

$$\mathcal{F}_{map} : \mathcal{M}_{\mathcal{S}}(P, J_P^H) \longrightarrow \mathcal{M}_{\mathcal{F}_{map}(\mathcal{S})}.$$

*Pour une donnée de strate stable $\mathcal{S}$ et $\mathbf{j} \in \mathcal{M}_{\mathcal{F}_{map}(\mathcal{S})}$ on définit l'espace de modules $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{S}\mathbf{j}}(P, J_P^H)$ l'espace des applications stables holomorphes dont le domaine est déterminé par $\mathbf{j}$. Encore une fois $\mathcal{M}_{\mathcal{S}\mathbf{j}}(P, J_P^H)$ est le quotient de l'espace précédent par $Aut(\mathbf{j})$. Cette action n'est pas forcément libre mais les groupes d'isotropies sont forcément finis par stabilité. En posant :*

$$\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{S}}(P, J_P^H) := \bigsqcup_{\mathbf{j} \in \mathcal{M}_{\mathcal{F}_{map}}(\mathcal{S})} \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{S}\mathbf{j}}(P, J_P^H),$$

*et en quotientant par la relation d'équivalence définie plus haut, nous obtenons $\mathcal{M}_{\mathcal{S}}(P, J_P^H)$.*

**Groupe de reparamétrisation.** Dans ce qui suit, nous fixons la structure conforme sur $S^2$ à $j_0$. Dénotons par $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{S}}(P, J_P^H)$ l'ensemble de toutes les applications $j_0, J_P^H$-holomorphes ayant $\mathcal{S}$ comme représentation en terme d'arbre avec tiges. Un élément de $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{S}}(P, J_P^H)$ sera noté par $(\mathbf{u}, \mathbf{y}, \mathbf{x})$ où $\mathbf{x}$ désigne l'ensemble des points marqués, $\mathbf{y}$ l'ensemble des singularités (vue dans la normalisation), et $\mathbf{u}$ l'ensemble des applications. Chaque donnée de strate vient avec un groupe de reparamétrisations du domaine de l'application. Afin de pouvoir le décrire, nous définissons au préalable les automorphismes d'une donnée de strate.

**Définition 3.1.11.** *Soit $\mathcal{S} = (T, D, \vec{\sigma})$ une donnée de strate. Le groupe $Aut(\mathcal{S})$ est l'ensemble des automorphismes $\gamma \in Aut(T, D)$ tels que $\sigma_{\gamma(i)} = \sigma_i$.*

Dans ce contexte, la notion d'isomorphisme d'applications holomorphes ayant pour domaine $(S^2, j_0, x_1, ..., x_l)$, prend la forme suivante. Soit $\mathcal{S} = (T, D, \vec{\sigma})$ une donnée de strate indicée par $I$, et soient $(\mathbf{u}, \mathbf{y}, \mathbf{x}), (\mathbf{u}', \mathbf{y}', \mathbf{x}') \in \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{S}}(P, J_P^H)$. Alors $(\mathbf{u}, \mathbf{y}, \mathbf{x})$ est isomorphe à $(\mathbf{u}', \mathbf{y}', \mathbf{x}')$ s'il existe un élément $\gamma \in \mathrm{Aut}(\mathcal{S})$ et une famille sur $I$ de biholomorphismes

$$\varphi_i : \Sigma_i \longrightarrow \Sigma_{\gamma(i)},$$

tels que $\forall i \in I$, $k = 1, ..., l$, $iEj$, $i, j \in I$, nous avons :

$$x'_k = \varphi_{D(k)}(x_k), \quad y'_{\gamma(i)\gamma(j)} = \varphi_i(y_{ij}), \quad u'_{\gamma(i)} = u \circ \varphi_i. \tag{3.1.8}$$

**Définition 3.1.12.** *Le groupe des reparamétrisations, noté $G_{\mathcal{S}}$, associé à la donnée de strate $\mathcal{S} = (T, D, \vec{\sigma})$, est l'ensemble des paires*

$$(\{\varphi_i\}_{i \in I}, \gamma) \in (PSL_2(\mathbb{C}))^{|E|+1} \times Aut(\mathcal{S}),$$

*où $|E|$ représente simplement le nombre d'arêtes de $T$.*

Le groupe $G_{\mathcal{S}}$ agit sur $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{S}}(P, J_P^H)$ de la façon décrite par (3.1.8). Lorsque $\mathcal{S}$ est stable, cette action est propre.

**Définition 3.1.13.** *Soit $(\mathbf{u}, \mathbf{y}, \mathbf{x}) \in \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{S}}(P, J_P^H)$. On dénotera par*

$$Aut(\mathbf{u}, \mathbf{y}, \mathbf{x}) \subset G_{\mathcal{S}},$$

*le sous-groupe d'isotropie de $(\mathbf{u}, \mathbf{y}, \mathbf{x})$. Alternativement, on dira que c'est le groupe d'automorphisme de $(\mathbf{u}, \mathbf{y}, \mathbf{x})$.*

**Remarque 3.1.13.** *Si $\mathcal{S}$ est stable, le sous-groupe d'isotropie est forcément fini.*

L'ensemble des classes d'isomorphisme d'applications stables ayant $\mathcal{S}$ comme description est donc donné par quotient $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{S}}(P, J_P^H)$ sous l'action du groupe $G_{\mathcal{S}}$, i.e :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{S}}(P, J_P^H) := \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{S}}(P, J_P^H)/G_{\mathcal{S}}.$$

Un élément de $\mathcal{M}_{\mathcal{S}}(P, J_P^H)$ sera noté $[\mathbf{u}, \mathbf{y}, \mathbf{x}]$.

**Définition 3.1.14.** *Une application stable $(\mathbf{u}, \mathbf{y}, \mathbf{x})$ est dite **réduite** si elle ne possède pas de composante ramifiée, ni deux composantes ayant la même image, non-constante, dans $P$.*

Un application stable réduite est souvent appelée **simple**. Pour une donnée de strate stable fixée, nous désignerons par

$$\widetilde{\mathcal{M}}^*_{\mathcal{S}}(P, J_P^H) \subset \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{S}}(P, J_P^H),$$

le sous-ensemble des applications stables simples paramétrées. Par définition, une application stable simple ne possède pas d'automorphisme à part l'identité. Par conséquent, l'action du groupe de reparamétrisation sur l'ensemble de ces applications est libre. Nous posons :

$$\mathcal{M}_S^*(P, J_P^H) := \widetilde{\mathcal{M}}_S^*(P, J_P^H)/G_S.$$

On peut montrer ([**29**]) que toute application stable possède une application réduite sous-jacente. Cependant, le processus de réduction d'une application stable ne préserve pas forcément la donnée de strate. En particulier, cela ne préserve pas la donnée homologique. Dans les faits, si $A_{red} = A_1 + ... + A_c$ désigne la classe que l'application réduite représente, alors il existe des entiers $m_1, ..., m_c$ tels que l'application non-réduite de départ représente cette fois $A = m_1 A_1 + ... + m_c A_c$.

**Remarque 3.1.14.** *Pour des raisons techniques qui apparaitront évidentes plus tard, nous devrons considérer des applications stables non forcément connexes. Dans ce cas, $T$ ne représentera plus simplement un arbre, mais plus généralement une forêt.*

### 3.1.3. Applications stables pour une fibration Hamiltonienne

Nous explicitons à présent la description des éléments de $\overline{\mathcal{M}}_{0,l}(P, J_P^H, \sigma)$. Comme lors du chapitre précédent, étant donné que la structure complexe $J_P^H$ a été choisie fibrée, l'application $\pi$ induit, à l'aide de la procédure de stabilisation, une application entre les applications stables de $P$ (avec $l$ points marqués) et les applications stables de $B$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_\pi : \overline{\mathcal{M}}_{0,l}(P, \sigma; J_P^H) &\longrightarrow \overline{\mathcal{M}}_{0,l}(B, \pi_*(\sigma); J_B) \\ [\Sigma, j, \{u_i\}, x_1, ..., x_l] &\mapsto \mathrm{st}[\Sigma, j, \{u_{B,i}\}, x_1, ..., x_l], \end{aligned} \tag{3.1.9}$$

où $u_{B,i} := \pi(u_i)$ et st dénote la procédure de stabilisation consistant à contracter toute composante constante de $[\Sigma, j, \{u_{B,i}\}, x_1, ..., x_l]$ ayant moins de trois points spéciaux. Notons que cette application est bien définie par équivariance de $\pi$ vis-à-vis du groupe de reparamétrisations.

**Remarque 3.1.15.** *Il est intéressant de noter que lorsque $B$ est un point seulement, l'application $\mathcal{F}_\pi$ coïncide avec l'application oubli usuelle. Par conséquent, si nous désignons par $\mathcal{F}_P$ et $\mathcal{F}_B$ les applications oubli ayant respectivement pour* *domaines* $\overline{\mathcal{M}}_{0,l}(P,\sigma;J_P^H)$ *et* $\overline{\mathcal{M}}_{0,l}(B,\pi_*\sigma;J_B)$ *nous voyons clairement que :*

$$\mathcal{F}_P = \mathcal{F}_B \circ \mathcal{F}_\pi.$$

Supposons que les composantes de $[\Sigma, j, \{u_i\}, x_1, ..., x_l]$ sont indicées par $I$. Alors, nous dénoterons par $I^h$ le sous-ensemble de $I$ subsistant après avoir projeté le long de $\mathcal{F}_\pi$ et par $I^v$ le complément de $I^h$ dans $I$. Les éléments indicés par $I^h$ seront appelés **racines** ou encore **composantes principales**, tandis que les composantes indicées par $I^v$ seront dénommées **composantes de fibre**. Cette dernière appellation est motivée par le fait que pour tout $i \in I^v$, la composante correspondante repose entièrement dans une (unique) fibre de $\pi$. Remarquons aussi que pour tout $i \in I^h$ la composante correspondante repose cette fois dans la restriction de $P$ à l'image de $u_{B,i}$.

**Remarque 3.1.16.** *Les composantes indicées par* $I^h$ *peuvent avoir une projection constante. En particulier, si* $\sigma$ *se projette sur l'élément nul dans* $H_2^S(B)$, *alors chaque* $u_i$ *se projette sur une application constante dans* $B$. *Dans ce cas,* $\mathcal{F}_\pi$ *peut très bien ne pas avoir d'image stable (e.g si on a plus d'une composante et aucun point marqué) et nous poserons alors* $\mathcal{F}_\pi = \pi$. *Notons en plus que, étant donné que* $\Sigma$ *est connexe, toutes les composantes reposent dans la même fibre et nous pouvons écrire* $\overline{\mathcal{M}}_{0,l}(P,\sigma;J_P^H)$ *comme suit :*

$$\left\{(b,[\Sigma,j,u,z_1,....,z_l]) \mid b \in B \text{ et } [\Sigma,j,u,z_1,....,z_l] \in \overline{\mathcal{M}}_{0,l}(F_b,\sigma_b,J_b)\right\},$$

*où* $\sigma_b \in H_2(F_b;\mathbb{Z})$ *est une famille de classes telles que* $i_b(\sigma_b) = \sigma$. *On remarquera aussi que dans le cas d'une composante avec au moins 3 points marqués, les applications* $\pi$ *et* $\mathcal{F}_\pi$ *coïncident encore.*

Toujours en utilisant les notations de [29], nous dénoterons par $[i,j] \equiv [j,i]$ (pour $i,j \in I$ ), la chaîne minimale de sommets de $T$ connectant les sommets $i$ et $j$. On définit alors $T_{[i;j]}$ comme étant le sous-arbre de $T$ correspondant. Plus généralement, à tout sous-ensemble de sommets $K \subset I$ on peut associer une forêt, i.e un arbre non nécessairement connexe, que nous désignerons par $T(K)$. Voici quelques sous-arbres qui vont nous intéresser par la suite.

**Branches connectantes.** Pour $i, j \in I^h$ on définit :

$$C_{i,j} := C_{j,i} := \begin{cases} [i,j] & \text{si } k \in [i,j]\backslash\{i,j\} \text{ implique } k \in I^v \\ \emptyset & \text{sinon} \end{cases}$$

ainsi que

$$C^*_{i,j} := C_{i,j}\backslash\{i,j\}.$$

Ce dernier ensemble décrit les chaînes de composantes se trouvant dans des fibres de $\pi$, qui relient les composantes $i$ et $j$ sans jamais passer par un autre élément de $I^h$. Comme nous nous préoccupons seulement du cas où le genre arithmétique $T$ est 0, le sous-arbre $T(C^*_{i,j})$ doit être connexe et nous pouvons donc conclure que son image dans $P$ réside dans une unique fibre. Nous dirons qu'un tel sous-arbre est une **branche connectante**. Chaque branche connectante apparait avec deux points nodaux spécifiques, $c^i_{i,j}$ et $c^j_{i,j}$, qui sont les points reliant $T(C^*_{i,j})$ à la $i$-ème et la $j$-ème composante (resp.). Par conséquent, l'application st$[\Sigma, j, \{u_{B,i}\}, x_1, ..., x_l]$ peut s'écrire de la façon suivante (au niveau de la normalisation) :

$$[\{\Sigma_i\}_{i\in I^h}, \{u_{B,i}\}_{i\in I^h}, \{y_{ij}\}_{\{i,j\in I^h \mid iEj\}}, \{c^i_{i,j}, c^j_{i,j}\}_{i,j\in I^h}].$$

**Branches libres.** Pour $i \in I^h$ on définit :

$$Br_i := \left\{k \in I^v \mid i \in [k,j], \forall j \in I^h\right\}.$$

Cet ensemble regroupe les composantes de fibre se trouvant dans la restriction de $P$ à $u_{B,i}(\Sigma_i)$ qui sont connectées à la $i$-ème composante via une chaîne de composantes de fibre non contenue dans une branche connectante. Le sous-arbre $T(Br_i)$ n'est pas nécessairement connexe. Chacune de ses composantes connexes doivent reposer dans des fibres de $\pi$ différentes et nous les appellerons **branches libres**. Remarquons que toute branche libre est reliée à sa composante principale, mettons $i$, par un unique point nodal noté $b_{i,\alpha}$. Dès lors, toute branche libre est donnée comme suit :

$$Br_{i,\alpha} := \{k \in Br_i \mid \pi(u_k) = u_{B,i}(b_{i,\alpha})\}.$$

Etant donné un ordre noté $<$ sur l'ensemble $I^h$, nous concluons par construction que :

$$I = I^h \sqcup \bigcup_{\{i,j \in I^h \mid i<j\}} C^*_{i,j} \sqcup \bigcup_{i \in I^h} Br_i.$$

**Donnée de Strate.** L'application $\mathcal{F}_\pi$ restreinte à une strate donnée de $\overline{\mathcal{M}}_{0,l}(P, J^H_P; \sigma)$ donne :

$$\mathcal{F}_\pi : \mathcal{M}_{\mathcal{S}}(P, J^H_P) \longrightarrow \mathcal{M}_{\mathcal{F}_\pi(\mathcal{S})}(B, J_B),$$

pour $\mathcal{S} = (T, D, \vec{\sigma})$ une donnée de strate fixée d'applications $J^H_P$-holomorphes, et où $\mathcal{F}_\pi(\mathcal{S})$ désigne la donnée de strate correspondante d'applications $J_B$-holomorphes. Par la suite, nous écrirons souvent $\mathcal{S}_B = (T_B, D_B, \vec{\sigma}_B)$ à la place de $\mathcal{F}_\pi(\mathcal{S})$. Nous donnons à présent une description de $\mathcal{S}_B$. Supposons que $I$ indice les sommets de $T$. Alors, les sommets de $T_B$ sont indicés par $I_B = I_h$, et ses arêtes sont données par les points nodaux existant déjà entre les racines plus un nouveau point nodal pour chaque branche connectante. Pour les tiges, on observe que par définition il ne peut y avoir de point marqué sur une branche connectante et que toute branche libre peut posséder au plus un point marqué (reposant sur la dernière composante de la branche!). Nous pouvons donc écrire :

$$D_B(m) = \begin{cases} D(m) & \text{si } D(m) \in I^h \\ i & \text{si } D(m) \in Br_i \text{ avec } i \in I^h. \end{cases}$$

Subséquemment nous obtenons :

$$\mathcal{F}_\pi : x_m \mapsto \begin{cases} x_m & \text{si } D(m) \in I^h \\ b_{i,\alpha} & \text{si } D(m) \in Br_{i,\alpha} \text{ avec } i \in I^h. \end{cases}$$

Finalement, en écrivant $\vec{\sigma}$ comme

$$\vec{\sigma} := \sum_{i \in I^h} \sigma_i + \sum_{i \in I^v} \sigma_i$$

nous avons que :

$$\vec{\sigma}_B := \sum_{i \in I_B} \sigma_{B,i} = \sum_{i \in I^h} \pi_* \sigma_i.$$

**Ajout de points marqués.** Il est possible de faire en sorte que la projection préserve la description d'arbre des applications stables en ajoutant le montant minimum de points marqués nécessaires pour s'assurer que chaque composante de fibre possède au moins trois points spéciaux. Si $\mathcal{S} = (T, D, \vec{\sigma})$ est une donnée de strate avec $l$ tiges, le fait d'ajouter $k$ nouveaux points marqués, change l'application $D : \{1, ..., l\} \longrightarrow I$ en $D_{(+k)} : \{1, ..., l+k\} \longrightarrow I$ et la donnée de strate résultante est notée $\mathcal{S}(k) = (T, D_{(+k)}, \vec{\sigma})$. Soit $\mathcal{S}_B = (T_B, D_B, \vec{\sigma}_B)$ la projection de $\mathcal{S}$. Maintenant, pour chaque $i \in I^v$ on ajoute un ou deux points marqués selon si la $i$-ème composante est déjà équipée de zéro ou un point marqué (on suppose ici que nous avons plus d'une composante dans l'arbre). Considérons l'assignation associée $D_{(+k)}$. Nous voyons que :

$$\mathcal{S}_B(k) := \mathcal{F}_\pi(\mathcal{S}(k)) = (T, D_{(+k)}, \vec{\sigma}_B \cup \{0\}_{i \in I^v}).$$

Cette procédure d'ajout se révèlera particulièrement utile lorsque nous voudrons établir la transversalité pour une strate donnée.

**L'ensemble de toutes les strates.** Soit $\mathcal{D}_{0,l}^{\sigma, J_P^H}$, l'ensemble de toutes les données de strates stables de $\overline{\mathcal{M}}_{0,l}(P, J_P^H; \sigma)$.

**Lemme 3.1.5.** $|\mathcal{D}_{0,l}^{\sigma, J_P^H}| < \infty$.

**Preuve:** Nous savons que le phénomène de "bubbling off" de sphère nécessite un minimum d'énergie usuellement dénoté $\hbar$. Étant donné que l'énergie est bornée supérieurement par (3.1.6), il existe un maximum $m > 0$ tel que $m\hbar$ n'excède pas la borne (3.1.6). Par conséquent, il ne peut y avoir qu'un nombre fini de composantes non-constantes dans une application stable apparaissant comme limite d'une suite de courbes $J_P^H$-holomorphes. De plus, par la condition de stabilité et étant donné que l'on considère seulement un nombre fini de points marqués, nous n'avons qu'un nombre fini de composantes triviales apparaissant. Ainsi, le nombre de donnée de strate est fini.

$\square$

Nous avons encore un ordre partiel sur les strates noté $<$ défini par les contractions des arêtes. Dans les notations précédentes, on doit alors avoir en plus que la classe d'homologie associée au nouveau sommet est donnée par la somme des classes d'homologie des sommets contractés ensembles. Nous pouvons donc parler de strate plus petite en répétant la discussion d'auparavant dans le cas Deligne-Mumford.

**Réduction.** Nous remarquons ici que $\mathcal{F}_\pi$ peut tout à fait envoyer une application stable réduite de $P$ sur une application stable réductible dans $B$. En effet, nous avons déjà remarqué qu'une courbe simple dans $P$ peut se projeter sur une courbe ramifiée non-constante. De même, il est possible d'avoir deux composantes d'une application stable dans $P$ qui se projettent sur la même application dans $B$. Cela a des répercussions "dramatiques" sur la transversalité. Par conséquent, pour chaque donnée de strate $\mathcal{S}$ nous restreindrons notre attention à l'ensemble des éléments

$$\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{S}}^{**}(P, J_P^H) \subset \mathcal{M}_{\mathcal{S}}(P, J_P^H),$$

qui sont simples et tels que leur projection est simple, i.e se trouve dans le sous-ensemble des éléments simples pour la donnée de strate $\mathcal{S}_B$. Nous posons encore une fois

$$\mathcal{M}_{\mathcal{S}}^{**}(P, J_P^H) := \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{S}}^{**}(P, J_P^H)/G_{\mathcal{S}}.$$

À un certain point, nous demanderons même que la condition suivante soit réalisée :

**Définition 3.1.15.** *Soit $J_B \in \mathcal{J}_B$ fixé. Une 2-classe d'homologie $\sigma_B$ n'admet aucune* ***décomposition effective réductible*** *relativement à $J_B$ si toute strate $\mathcal{M}_{\mathcal{S}_B}(B, J_B) \subset \mathcal{M}(B; \sigma_B; J_B)$ est irréductible.*

On désignera par $\mathcal{J}_{irr}(\sigma_B)$ l'ensemble de toutes les structures presque complexes $\omega_B$-compatibles pour lesquelles $\sigma_B$ n'admet que des décompositions effectives irréductibles. Cette condition est entre autre réalisée lorsque $\sigma_B$ est une classe primitive, i.e si cette classe minimise l'énergie.

**Exemples 3.1.1.** *Un exemple concret d'une telle classe d'homologie qui n'est pas primitive est celui de la diagonale dans $S^2 \times S^2$, avec la structure complexe produit. Pour un exemple de classe primitive il suffit de considérer la classe de la droite dans $\mathbb{C}P^n$.*

**Lemme 3.1.6.** *L'ensemble $\mathcal{J}_{irr}(\sigma_B)$ est ouvert dans $\mathcal{J}(B, \omega_B)$.*

**Preuve:** $\mathcal{J}_{irr}(\sigma_B)$ est réalisé comme le complémentaire d'une réunion finie d'ensembles fermés, correspondant aux structures complexes pour lesquelles une des composantes est ramifiée ou bien deux composantes ont la même image. Le fait qu'il n'y ait qu'un nombre fini de ces ensembles nous est assuré par le lemme 3.1.5 appliqué à $B$.

□

Remarquons que cet ensemble peut être vide à priori.

## 3.2. Transversalité pour toutes les strates

Fixons une donnée de strate $\mathcal{S} = (T, D, \vec{\sigma})$ et soit $\mathcal{S}_B = (T_B, D_B, \vec{\sigma}_B)$ sa projection. Nous allons à présent démontrer que l'espace de modules $\mathcal{M}^{**}_{\mathcal{S}}(P, J^H_P)$, est une variété orientée lisse, pour un choix générique de structures presque complexes fibrées se projetant sur l'ensemble régularisant de $\mathcal{M}^*_{\mathcal{S}_B}(B, J_B)$.

On commence par l'observation suivante. Considérons une famille finie de 2-classes d'homologie $\vec{\sigma}$ dans $P$ indicée par $I$ :

$$\vec{\sigma} := \{\sigma_i\}_{i\in I} := \{\sigma_i\}_{i\in I_+} \cup \{\sigma_i\}_{i\in I_0},$$

où $I_0$ est le sous-ensemble de $I$ correspondant aux classes d'homologie se projetant trivialement, et $I_+$ désigne le complémentaire de $I_0$ dans $I$. Soit $\vec{\sigma}_B$ donné par $\pi_*\vec{\sigma}$ de sorte que :

$$\vec{\sigma}_B = \{\pi_*\sigma_i\}_{i\in I} = \{\pi_*\sigma_i\}_{i\in I_+} \cup \{0\}_{i\in I_0}.$$

Considérons le produit des espaces de modules universels associé à $\vec{\sigma}$ :

$$\prod_{i\in I} \mathcal{M}^{**}(P, \sigma_i; \mathcal{P}), \tag{3.2.1}$$

et soit $\Theta_{\mathcal{P}}$ la projection de ce produit vers $\mathcal{P}^I$. Dénotons par $\Delta_{\mathcal{P}^I} \subset \mathcal{P}^I$ la diagonale et posons :

$$\mathcal{M}^{**}(P, \vec{\sigma}; \mathcal{P}) := \Theta_{\mathcal{P}}^{-1}(\Delta_{\mathcal{P}^I}). \tag{3.2.2}$$

On définit de la même façon :

$$\mathcal{M}^*(B, \vec{\sigma}_B; \mathcal{J}_B) \subset \prod_{i\in I} \mathcal{M}^*(B, \sigma_{B,i}; \mathcal{J}_B), \tag{3.2.3}$$

c'est-à-dire comme la préimage de la diagonale $\Delta_{(\mathcal{J}_B)^I} \subset (\mathcal{J}_B)^I$ par la projection $\Theta_{\mathcal{J}_B}$. Notons encore une fois que la fibration $\pi$ induit une application :

$$\pi : \mathcal{M}^{**}(P,\vec{\sigma};\mathcal{P}) \longrightarrow \mathcal{M}^*(B,\vec{\sigma}_B;\mathcal{J}_B) \ , \ (\mathbf{u}, J_P^H) \mapsto (\mathbf{u}_B, J_B),$$

où $\mathbf{u} := \{u_i\}_{i\in I}$ et $\mathbf{u}_B := \pi(\mathbf{u})$. On pose

$$\mathcal{B}_P^{1,p}(\vec{\sigma},\mathcal{P}) := \prod_{i\in I} \mathcal{B}_P^{1,p}(\sigma_i) \times \mathcal{P} \ \text{ et } \ \mathcal{B}_B^{1,p}(\vec{\sigma}_B,\mathcal{J}_B) := \prod_{i\in I} \mathcal{B}_B^{1,p}(\sigma_{B,i}) \times \mathcal{J}_B.$$

On désignera par $\mathcal{E}_P(\vec{\sigma})$, ainsi que par $\mathcal{E}_B(\vec{\sigma}_B)$, les fibrés de Banach au-dessus de $\mathcal{B}_P^{1,p}(\vec{\sigma},\mathcal{P})$ et $\mathcal{B}_B^{1,p}(\vec{\sigma}_B,\mathcal{J}_B)$, dont les fibres au-dessus de $(\mathbf{u}, J_P^H)$ et $(\mathbf{u}_B, J_B)$ sont données respectivement par :

$$\bigoplus_{i\in I} \mathcal{E}^p_{P,u_i}(J_P^H) \ \text{ et } \ \bigoplus_{i\in I} \mathcal{E}^p_{B,u_{B,i}}(J_B).$$

L'ensemble $\mathcal{M}^*(B,\vec{\sigma}_B;\mathcal{J}_B)$ peut être obtenu comme sous-ensemble des zéros de la section :

$$s_B : \mathcal{B}_B^{1,p}(\vec{\sigma}_B,\mathcal{J}_B) \longrightarrow \mathcal{E}_B(\vec{\sigma}_B) \ , \ (\mathbf{u}_B, J_B) \mapsto \overline{\partial}_{J_B}(\mathbf{u}_B).$$

Similairement $\mathcal{M}^{**}(P,\vec{\sigma};\mathcal{P})$ est obtenu comme sous-ensemble des zéros de :

$$s_P : \mathcal{B}_P^{1,p}(\vec{\sigma},\mathcal{P}) \longrightarrow \mathcal{E}_P(\vec{\sigma}) \ , \ (\mathbf{u}, J_P^H) \mapsto \overline{\partial}_{J_P^H}(\mathbf{u}).$$

**Lemme 3.2.1.** *Pour tout $r \geq 2$, les ensembles $\mathcal{M}(P,\vec{\sigma};\mathcal{P}^r)$ et $\mathcal{M}(B,\vec{\sigma}_B;\mathcal{J}_B^r)$ sont des sous-variétés de Banach séparables de classe $C^{r-1}$ des ensembles $\mathcal{B}_P^{1,p}(\vec{\sigma},\mathcal{P}^r)$ et $\mathcal{B}_B^{1,p}(\vec{\sigma}_B,\mathcal{J}_B^r)$ respectivement. De plus, l'application $\pi$ ci-dessus définit une submersion lisse entre ces espaces.*

**Preuve:** Dans ce qui suit, nous oublierons l'entier $r$. Dans [**29**], McDuff et Salamon montrent que le résultat s'applique à $\mathcal{M}^*(B,\vec{\sigma}_B;\mathcal{J}_B)$. Ceci est démontré en montrant que pour tout élément $(\mathbf{u}_B, J_B) \in \mathcal{M}^*(B,\vec{\sigma}_B;\mathcal{J}_B)$ l'opérateur différentiel :

$$\begin{aligned} \widetilde{D}^B_{(\mathbf{u},J_B)} : \bigoplus_{i\in I^h} \mathcal{X}^{1,p}_{B,u_{B,i}} \oplus T_{J_B}\mathcal{J}_B \quad &\longrightarrow \quad \bigoplus_{i\in I^h} \mathcal{E}^p_{B,u_{B,i}} \\ (\xi_B, Y) \quad &\mapsto \quad D^B_{\mathbf{u}_B}\xi_B + \frac{1}{2}Y(\mathbf{u}_B)d\mathbf{u}_B \circ j \end{aligned}$$

est surjectif. Nous procédons de façon similaire. Pour tout point $(\mathbf{u}, J_P^H) \in \mathcal{M}^{**}(P, \vec{\sigma}; \mathcal{P})$ la linéarisation de $s_P$ en ce point est donnée par :

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{D}_{(\mathbf{u}, J_P^H)} : \bigoplus_{i\in I} \mathcal{X}^{1,p}_{P,u_i} \oplus T_{J_P^H}\mathcal{P} & \longrightarrow & \bigoplus_{i\in I} \mathcal{E}^p_{P,u_i}(J_P^H) \\ (\xi, Y^v, Y, f) & \rightarrow & D^H_{\mathbf{u}}\xi + \frac{1}{2}(Y \circ d\pi(\mathbf{u}) \circ j)^{h,H} \\ & & +\frac{1}{2} Y^v \circ (d\mathbf{u})^v \circ j + X^{0,1}_{f(d\mathbf{u})}. \end{array}$$

Nous montrons à présent que cet opérateur est bien surjectif. Encore une fois, il suffit de montrer qu'il est dense. Supposons le contraire. Alors, par Hahn-Banach, il existerait un élément non-nul :

$$\{\eta_i\}_{i\in I} \in \bigoplus_{i\in I} L^q(\Lambda^{0,1}(S^2, u_i^* TP)),$$

(avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$) tel que $\eta_i$ est de classe $W^{1,p}$ et appartient au conoyau de $D^H_{u_i}$. En supplément nous devons avoir que :

$$\begin{aligned} 0 \;=\; & \sum_{i\in I_+} \int_{S^2} \left\langle \frac{1}{2}(Y \circ d\pi(u_i) \circ j)^{h,H} + \frac{1}{2} Y^v \circ (du_i)^v \circ j + X^{0,1}_{f(du_i)}, \eta_i \right\rangle dvol_{S^2} \\ + & \sum_{i\in I_0} \int_{S^2} \left\langle \frac{1}{2} Y^v \circ (du_i)^v \circ j, \eta_i \right\rangle dvol_{S^2}. \end{aligned}$$

Étant donné que $\widetilde{D}^B_{(\pi(\mathbf{u}), J_B)}$ est surjectif et comme nous avons que

$$\pi_* \circ \widetilde{D}_{(\mathbf{u}, J_P^H)} = \widetilde{D}^B_{(\pi(\mathbf{u}), J_B)} \circ \pi_*,$$

nous pouvons conclure que chaque $\eta_i$ se trouve dans le sous-espace

$$L^q(\Lambda^{0,1}(S^2, u_i^* TP^v)),$$

et par conséquent, le terme impliquant l'élément $Y \in T_{J_B}\mathcal{J}_B$ doit disparaitre dans la somme ci-dessus. Le reste de la preuve est similaire à celle du théorème 2.3.1 : on montre qu'il existe $Y^v$ et $f$ tels que tous les termes de la somme doivent être strictement positifs à moins que les $\eta_i$ soient identiquement nuls. Voici comment procéder explicitement. Considérons d'abord $i \in I_+$. Soit $Z(u_i)$ l'ensemble des points non-injectifs de $u_i$, définissons le sous-ensemble de $S^2$ :

$$X(u_i) := Z(u_i) \cup \bigcup_{j\in I_+, j\neq i} u_i^{-1}(u_j(S^2)) \cup \bigcup_{j\in I_0} u_i^{-1}(u_j(S^2)).$$

Étant donné que nous ne considérons que les applications simples, le complément de cet ensemble est ouvert et dense dans $S^2$. Soit $x_i$ un point appartenant au complémentaire de $X(u_i)$. Dès lors, il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de $x_i$ plongé par l'intermédiaire de $u_i$ dans un voisinage $\mathcal{U}_i$ de $u(x_i)$ dans $P$, et qui n'intersecte l'image d'aucun autre $u_j$. Comme dans le théorème 2.3.1, on peut trouver une fonction $f \in T_H\mathcal{H}$ à support dans $\mathcal{U}_i$, telle que :

$$\int_{S^2} \left\langle X^{0,1}_{f(du_i)}, \eta_i \right\rangle dvol_{S^2} > 0.$$

On répète ce procédé pour $i \in I_0$. Cette fois-ci, on peut trouver des voisinages $\mathcal{U}_i$ de $u_i(x_i)$ dans $P$, où $x_i$ désigne un point injectif de $u_i$ étant dans le complémentaire de

$$X(u_i) := Z(u_i) \cup \bigcup_{j \in I_+} u_i^{-1}(u_j(S^2)) \cup \bigcup_{j \in I_0, j \neq i} u_i^{-1}(u_j(S^2)).$$

On trouve par la suite un élément $Y^v \in T_J\mathcal{J}^{vert}$ à support dans $\mathcal{U}_i$ tel que :

$$\int_{S^2} \left\langle \frac{1}{2} Y^v \circ (du_i)^v \circ j, \eta_i \right\rangle dvol_{S^2} > 0.$$

Les voisinages $\mathcal{U}_i$ peuvent être choisis de telle sorte qu'ils soient disjoints deux à deux. Enfin, on pose $Y^v|_{u_i} = 0$ dès que $i \in I_+$ et $f|_{u_i} = 0$ lorsque $i \in I_0$. Dès lors, $Y^v$ et $f$ sont bien définis sur tout $P$, impliquant par là même que les $\eta_i$ sont tous identiquement nuls, puisque nuls presque partout et continus.

Afin de prouver l'application concernant la submersion, il suffit de remarquer que nous avons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E}_P(\vec{\sigma}) \arrow[r, "\pi"] & \mathcal{E}_B(\vec{\sigma}_B) \\
\mathcal{B}^{1,p}_P(\vec{\sigma}, \mathcal{P}) \arrow[u, "s_P"] \arrow[r, "\pi"] & \mathcal{B}^{1,p}_B(\vec{\sigma}_B, \mathcal{J}_B) \arrow[u, "s_B"']
\end{tikzcd}$$

qui induit la suite exacte :

$$\begin{aligned}
0 \longrightarrow \quad & \ker \widetilde{D}^v_{(\mathrm{u}, J^H_P)} \longrightarrow \ker \widetilde{D}_{(\mathrm{u}, J^H_P)} \longrightarrow \ker \widetilde{D}^B_{(\pi(\mathrm{u}), J_B)} \longrightarrow \\
\longrightarrow \quad & \operatorname{coker} \widetilde{D}^v_{(\mathrm{u}, J^H_P)} \longrightarrow \operatorname{coker} \widetilde{D}_{(\mathrm{u}, J^H_P)} \longrightarrow \operatorname{coker} \widetilde{D}^B_{(\pi(\mathrm{u}), J_B)} \longrightarrow 0.
\end{aligned}$$

Finalement, l'argument précédent nous assure que tous les conoyaux doivent s'annuler, ce qui termine la démonstration. $\square$

Soit $E$ l'ensemble des arêtes du graphe $T$ contenu dans la donnée de strate $\mathcal{S}$. À chaque arête $s$ (correspondant au point nodal $y_s$) on associe la diagonale $\Delta_{y_s}$ dans $P \times P$. Dénotons par $|E|$ le nombre d'arêtes de $T$. On pose :

$$\Delta_E := \prod_{s \in E} \Delta_{y_s} \subset (P^2)^{|E|} \equiv P^E.$$

Soit aussi $I(T)$ le sous-ensemble de $(S^2)^{2|E|} \times (S^2)^l$, formé par tous les uplets $(\{y_{ij}\}_{iEj}, x_1, \ldots, x_l)$ satisfaisant $y_{ij} \neq y_{ji}$, $x_m \neq y_{ij}$ $\forall m, i, j$ tels que $iEj$ et $D(m) = i$ ou $D(m) = j$, ainsi que $x_n \neq x_m$ $\forall n, m$ tels que $D(n) = D(m)$. Nous définissons l'**application d'évaluation (en les arêtes) universelle** :

$$\begin{aligned} ev_E : \mathcal{M}^{**}(P, \vec{\sigma}, \mathcal{P}) \times I(T) &\longrightarrow (P)^E \\ (\mathbf{u}, J_P^H, \mathbf{y}, \mathbf{x}) &\mapsto \mathbf{u}(\mathbf{y}) \end{aligned} \tag{3.2.4}$$

où $\mathbf{x}$ désigne l'ensemble des points marqués, $\mathbf{u} := \{u_i\}_{i \in I}$, $\mathbf{y} := \{y_{ij}\}_{iEj}$ et

$$\mathbf{u}(\mathbf{y}) = \{u_i(y_{ij})\}_{\{iEj, i,j \in I\}}.$$

Nous désirons montrer que $ev_E \pitchfork \Delta_E$. Si tel est le cas, la strate universelle

$$\widetilde{\mathcal{M}}^{**}_{\mathcal{S}}(P, \mathcal{P}^l) = ev_E^{-1}(\Delta_E),$$

peut être munie d'une structure de variété de Banach (de classe $C^{r-1}$ si on se restreint aux paramètres de classe $C^r$).

Considérons la projection $\mathcal{S}_B = (T_B, D_B, \vec{\sigma}_B)$ de $\mathcal{S}$. Soit $E_B$ l'ensemble des arêtes de l'arbre $T_B$, dont les sommets, nous le rappelons, sont indicés par l'ensemble $I^h$. Soit $\Delta_{E_B}$ la diagonale correspondante dans $B^{E_B}$. Nous avons encore une fois une application d'évaluation dite universelle :

$$\begin{aligned} ev_{E_B} : \mathcal{M}^*(B, \vec{\sigma}_B, \mathcal{J}_B) \times I(T_B) &\longrightarrow (B)^{E_B} \\ (\mathbf{u}_B, J_B, \mathbf{y}_B, \mathbf{x}) &\mapsto \mathbf{u}_B(\mathbf{y}_B), \end{aligned} \tag{3.2.5}$$

où $\mathbf{u}_B := \{u_{B,i}\}_{i \in I^h}$, $\mathbf{y}_B := (\{y_{ij}\}_{\{iEj, i,j \in I^h\}}, \{c^i_{i,j}, c^j_{i,j}\}_{\{i,j \in I^h \mid C^{\cdot}_{i,j} \neq \emptyset\}})$ et

$$\mathbf{u}_B(\mathbf{y}_B) = (\{u_{B,i}(y_{ij})\}_{\{iEj, i,j \in I^h\}}, \{u_{B,i}(c^i_{i,j}), u_{B,j}(c^j_{i,j})\}_{\{C^{\cdot}_{i,j} \neq \emptyset\}}).$$

Le diagramme suivant est directement obtenu :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M}^{**}(P,\vec{\sigma},\mathcal{P}) \times I(T) \arrow[r, "ev_E"] \arrow[d, "\Pi^{I^h}"] & P^E \arrow[d, "\pi^{I^h}"] \\
\mathcal{M}^{*}(B,\vec{\sigma}_B,\mathcal{J}_B) \times I(T_B) \arrow[r, "ev_{E_B}"] & B^{E_B}
\end{tikzcd} \tag{3.2.6}$$

où $\Pi^{I^h}$ sert à désigner l'application définie par :

$$(\mathrm{u}, J_P^H, \mathbf{y}, \mathbf{x}) \to (\mathrm{u}_B, J_B, \mathbf{y}_B, \mathbf{x}).$$

Le lemme précédent nous donne en particulier que cette application est une submersion. De plus, la restriction de $\Pi^{I^h}$ à $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{S}}^{**}(P,\mathcal{P})$ est donnée par

$$\mathcal{F}_\pi^{univ} := \mathcal{F}_\pi \times p_1 : \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{S}}^{**}(P,\mathcal{P}) \longrightarrow \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{S}_B}^{*}(B,\mathcal{J}_B). \tag{3.2.7}$$

**Lemme 3.2.2.** *Supposons que $ev_E$ est transverse à $\Delta_E$ pour la donnée de strate $\mathcal{S} = (T, D, \vec{\sigma})$, avec $(T, D)$ une forêt (étiquetée). Alors l'application* (3.2.7) *est une submersion.*

**Preuve:** Nous prouvons ce résultat dans le cas où la structure d'arbre de $\mathcal{S}$ est préservée sous $\mathcal{F}_\pi$. Cela suffit, étant donné que nous pouvons tout le temps nous placer dans cette situation, en ajoutant le nombre minimum de points marqués nécessaires sur les composantes de fibre, de sorte que les-dites composantes soient toutes équipées d'au moins trois points spéciaux. On remarque que cette procédure n'affecte pas la transversalité de $ev_E$, étant donné que $dev_E$ ne dépend pas du mouvement infinitésimal des points marqués. Supposons à présent que nous avons ajouté $k$ points marqués. Nous avons :

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{S}(k)}^{**}(P,\mathcal{P}) \arrow[r, "\mathcal{F}_\pi^{univ}"] \arrow[d, "\mathcal{F}_{P,k}"] & \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{S}_B(k)}^{*}(B,\mathcal{J}_B) \arrow[d, "\mathcal{F}_{B,k}"] \\
\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{S}}^{**}(P,\mathcal{P}) \arrow[r, "\mathcal{F}_\pi^{univ}"] & \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{S}_B}^{*}(B,\mathcal{J}_B)
\end{tikzcd} \tag{3.2.8}$$

où $\mathcal{F}_{P,k}$ et $\mathcal{F}_{B,k}$ dénotent ici les applications qui consistent à oublier les $k$ points marqués que nous avons ajoutés tout en stabilisant. On voit tout de suite que $\mathcal{F}_{P,k}$ est une submersion. Nous allons désormais montrer dans le diagramme ci-dessus que $\mathcal{F}_{B,k}$ et la flèche du haut sont des submersions. Notons que si tel est le cas, nous pouvons conclure que la flèche du bas est elle aussi une submersion, par commutativité du diagramme.

$\mathcal{F}_{B,k}$ **est une submersion.** Soit $(\mathbf{u}_B, \mathbf{y}, \mathbf{x}, J_B)$ un élément de $\widetilde{\mathcal{M}}^{**}_{\mathcal{S}(k)}(B, \mathcal{J}_B)$. Alors ce dernier s'écrit :

$$(\{u_{B,i}\}_{i\in I}, \{y_{ij}\}_{iEj}, x_1, ..., x_l, x_{l+1}, ..., x_{l+k}, J_B).$$

Soit $(\mathbf{u}_B, \mathbf{y}_B, \mathbf{x}', J_B)$ l'image de cet élément dans $\widetilde{\mathcal{M}}^{*}_{\mathcal{S}_B}(B, \mathcal{J}_B)$ via $\mathcal{F}_{B,k}$, de sorte que :

$$(\mathbf{u}_B, \mathbf{y}_B, \mathbf{x}', J_B) = (\{u_{B,i}\}_{i\in I^h}, \{y_{ij}\}_{\{iEj\,,\,i,j\in I^h\}}, \{c^i_{i,j}, c^j_{i,j}\}_{\{i,j\in I^h\,|\,C^*_{i,j}\neq\emptyset\}}, x_1, ..., x_l, J_B).$$

Le vecteur de $T_{(\mathbf{u}_B, \mathbf{y}_B, \mathbf{x}', J_B)}\widetilde{\mathcal{M}}^{*}_{\mathcal{S}_B}(B, \mathcal{J}_B)$ :

$$(\{\xi_i\}_{i\in I^h}, \{Y_{ij}\}_{\{iEj\,,\,i,j\in I^h\}}, \{Y^i_{i,j}, Y^j_{i,j}\}_{\{i,j\in I^h\,|\,C^*_{i,j}\neq\emptyset\}}, \{X_s\}_{s=1,...,l}, Y), \tag{3.2.9}$$

satisfait les relations

$$\begin{cases} D^B_{u_{B,i}}(\xi_i) + \frac{1}{2}Y(du_{B,i}\circ j) = 0 & \forall i \in I^h, \\ \xi_i(y_{ij}) + du_{B,i}(y_{ij})(Y_{ij}) = \xi_j(y_{ji}) + du_{B,j}(y_{ji})(Y_{ji}) & \text{pour } iEj \text{ avec } i,j\in I^h, \\ \xi_i(c^i_{i,j}) + du_{B,i}(c^i_{i,j})(Y^i_{i,j}) = \xi_j(c^j_{i,j}) + du_{B,j}(c^j_{i,j})(Y^j_{j,i}) & \text{pour } i,j\in I^h \text{ avec } C^*_{i,j}\neq\emptyset. \end{cases}$$

On veut relever ce vecteur en un vecteur :

$$(\{\xi'_i\}_{i\in I}, \{Y'_{ij}\}_{iEj}, \{X'_s\}_{s=1,...,l+k}, Y') \in T_{(\mathbf{u}_B, \mathbf{y}, \mathbf{x}, J_B)}\widetilde{\mathcal{M}}^{*}_{\mathcal{S}(k)}(B, \mathcal{J}_B), \tag{3.2.10}$$

satisfaisant les relations :

$$\begin{cases} D^B_{u_{B,i}}(\xi'_i) + \frac{1}{2}Y'(du_{B,i}\circ j) = 0 & \forall i \in I, \\ \xi'_i(y_{ij}) + du_{B,i}(y_{ij})(Y'_{ij}) = \xi'_j(y_{ji}) + du_{B,j}(y_{ji})(Y'_{ji}) & \text{lorsque } iEj, \end{cases} \tag{3.2.11}$$

et dont l'image par $d\mathcal{F}_{B,k}$ coïncide avec (3.2.9). Mais, par définition $d\mathcal{F}_{B,k}$, nous avons que :

$$\begin{cases} Y' = Y \\ \xi_i = \xi_i' & \forall i \in I^h, \\ Y_{ij}' = Y_{ij} & \forall i, j \in I^h \text{ tels que } iEj, \\ Y_{ik}' = Y_{i,j}^i & \text{pour } k \in C_{i,j}^* \text{ tel que } [i,k] = \{i,k\}, \\ X_s' = X_s & \forall s = 1, ..., l. \end{cases}$$

Soit $i \in I^h$ et soit $Br_{i,\alpha}$ une branche libre au-dessus de la racine $i$ connectée au point $b_{i,\alpha}$ de cette dernière. Alors, pour tout $j \in Br_{i,\alpha}$ nous posons $\xi_j' = \xi_i(b_{i,\alpha})$ ainsi que $Y_{jk} = 0$ pour toute paire $k, j \in Br_{i,\alpha} \cup \{i\}$ telle que $jEk$. Comme pour tout $j \in Br_{i,\alpha}$, l'application correspondante $u_{B,j}$ est triviale, les relations (3.2.11) sont satisfaites.

Nous traitons désormais le cas des branches connectantes. Soit $T(C_{i,j})$ une branche connectante où nous supposerons bien évidemment que $C_{i,j}^*$ est non-vide. Pour tout $k \in C_{i,j}^*$, on pose alors $\xi_k' = \xi_i(c_{i,j}^i) + du_{B,i}(c_{i,j}^i)(Y_{i,j}^i)$ et $Y_{kl} = 0$ pour toute paire $k, l \in C_{i,j}$. On voit encore une fois que les relations (3.2.11) sont satisfaites, la première résultant du fait que pour tout $k \in C_{i,j}^*$, $u_{B,k}$ est constante ainsi que $\xi_k$.

Enfin, il ne nous reste plus qu'à poser $X_s' = 0$ dès que $s = l+1, ..., l+k$.

$\mathcal{F}_\pi^{univ}$ **est une submersion.** Sans perte de généralité on peut oublier le $k$ dans les notations utilisées précédemment. Soit $(\mathbf{u}, \mathbf{y}, \mathbf{x}, J_P^H)$ un élément de $\widetilde{\mathcal{M}}_\mathcal{S}^{**}(P, \mathcal{P})$ et soit $(\mathbf{u}_B, \mathbf{y}, \mathbf{x}, J_B)$ son image dans $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{S}_B}^{*}(B, \mathcal{J}_B)$. Considérons

$$(\{\xi_i\}_{i\in I}, \{Y_{ij}\}_{iEj}, \{X_s\}_{s=1,...,l}, Y) \in T_{(\mathbf{u}_B, \mathbf{y}, \mathbf{x}, J_B)} \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{S}_B}^{*}(B, \mathcal{J}_B).$$

Nous souhaitons trouver un élément

$$(\{\xi_i'\}_{i\in I}, \{Y_{ij}'\}_{iEj}, \{X_s'\}_{s=1,...,l}, Y', Y^v, f) \in T_{(\mathbf{u}, \mathbf{y}, \mathbf{x}, J_P^H)} \widetilde{\mathcal{M}}_\mathcal{S}^{**}(P, \mathcal{P}),$$

qui est envoyé par $d(\mathcal{F}_\pi \times p_1)$ sur le premier vecteur. Mais étant donné que dans la situation présente $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}_B$ ont la même structure d'arbre, nous avons :

$$(\{\xi_i'\}_{i\in I}, \{Y_{ij}'\}_{iEj}, \{X_s'\}_{s=1,...,l}, Y', Y^v, f) \mapsto (\{d\pi(\xi_i')\}_{i\in I}, \{Y_{ij}'\}_{iEj}, \{X_s'\}_{s=1,...,l}, Y'),$$

via $d(\mathcal{F}_\pi^{univ})$, de sorte que : $Y' = Y$, $Y'_{ij} = Y_{ij}$ $\forall i, j \in I$ tels que $iEj$, $X'_s = X_s$, $\forall s = 1, ..., l$, et aussi

$$d\pi(\xi'_i) = \xi_i, \ \ \forall i \in I. \tag{3.2.12}$$

Soit $\xi_i^h$ le relevé horizontal de $\xi_i$. Alors la relation (3.2.12) est satisfaite avec $\xi'_i = \xi_i^h$, et nous obtenons alors directement que

$$\xi_i^h(y_{ij}) = \xi_j^h(y_{ji}).$$

Cependant, à moins que l'application $u_i$ ne soit constante, il n'est pas certain que nous ayons $\widetilde{D}_{(u_i, J_P^H)}\xi_i^h = 0$, or tout ce que nous savons jusqu'à présent, est que pour tout $i$,

$$\widetilde{D}_{(u_i, J_P^H)}\xi_i^h \in L^p(\Lambda^{0,1}_{J_P^H}(S^2, u_i^*TP^v)).$$

Néanmoins, le lemme 3.4.7 dans [29] (adapté au cas fibré) nous donne que, étant donné un ensemble fini points distincts, $\{z_0, z_1, ..., z_r\} \in \Sigma_i$, pour tout $\epsilon$ positif, l' ensemble $L^p(\Lambda^{0,1}_{J_P^H}(S^2, u_i^*TP^v))$ coïncide avec

$$\left\{D_{u_i}^{v,H}\xi_i + \frac{1}{2}Y^v \circ (du_i)^v \circ j \mid \xi_i(z_r) = 0, \ r \geq 1, \text{ et } \mathrm{supp}(Y^v) \subset B_\epsilon(u_i(z_0))\right\},$$

lorsque $i \in I_0$ et avec

$$\left\{D_{u_i}^{v,H}\xi_i + X^{0,1}_{f(du_i)} \mid \xi_i(z_r) = 0, \ r \geq 1, \text{ et } \mathrm{supp}(X_f) \subset B_\epsilon(u_i(z_0))\right\},$$

lorsque $i \in I_+$. Une preuve est fournie dans l'appendice. Maintenant, par hypothèse, les $u_i$ sont soit simples soit constants. Par conséquent, pour tout $i \in I$, tel que $u_i$ est non constant, il existe un point injectif $z_{0,i}$ et un voisinage $\mathcal{U}_i$ de $u_i(z_{0,i})$ dans $P$ tels que ces voisinages sont disjoints deux à deux, et n'intersectent aucune autre composante. Fixons $i \in I_+$ et considérons l'ensemble des points $\{z_{0,i}, y_{ij}\}$ dans $\Sigma_i$. Alors, par le résultat énoncé plus haut, en choisissant $\epsilon$ assez petit, il existe $\zeta_i \in W^{1,p}(u_i^*TP^v)$ et $f \in T_H\mathcal{H}$ tels que $\zeta(y_{ij}) = 0$, $\mathrm{supp}(X_f) \subset \mathcal{U}_i$, et

$$D_{u_i}^{v,H}\zeta_i + X^{0,1}_{f(du_i)} = \widetilde{D}_{(u_i, J_P^H)}\xi_i^h,$$

d'où nous tirons :

$$\widetilde{D}_{(u_i, J_P^H)}(\zeta_i - \xi_i^h) + X^{0,1}_{f(du_i)} = 0.$$

En faisant cela pour tout $i \in I$, où l'on remplace $X_f$ par $Y^v$ lorsque approprié, nous obtenons des vecteurs $f \in T_H\mathcal{H}$ et $Y^v \in T_J\mathcal{J}^{vert}$ bien définis, et il ne nous reste plus qu'à poser :

$$\xi_i' := \xi_i^h - \zeta_i.$$

□

**Proposition 3.2.3.** *L'application d'évaluation $ev_E$ est transverse à $\Delta_E$.*

**Preuve:** Nous allons en fait démontrer légèrement plus, c'est-à-dire que pour toute forêt avec $l$ tiges, la linéarisation $dev_E$ restreinte à $\ker d\Pi^{I^h}$ est transverse au sous-espace $T\Delta_E|_{TF^E}$. Remarquons que si tel est le cas, comme $ev_{E_B}$ est transverse à $\Delta_{E_B}$ pour toute forêt munie de $l$ tiges (cf chap 8 de [29]), l'application d'évaluation $ev_E$ doit elle aussi être transverse à la diagonale des arêtes. Afin d'éviter toute difficulté due à l'application oubli, on ajoute autant de points que nécessaires afin d'obtenir la stabilité pour toutes les composantes ayant une projection triviale. Notons encore une fois que ce procédé n'altère en aucune façon la transversalité recherchée (cf le début de la preuve du lemme 3.2.2). La preuve procède alors par induction sur le nombre d'arêtes de forêt avec tiges $(T, D)$.

Si la forêt ne possède aucune arête, l'affirmation est vide. Maintenant supposons l'affirmation correcte pour les forêts ayant au plus $N$ arêtes et soit $(T, D)$ une forêt avec $N+1$ arêtes (où $D$ est tel que toute composante avec projection triviale est stable). On choisit une arête quelconque, $iEj$, de $T$ donnée par la paire $(y_{ij}, y_{ji})$. On l'enlève puis on la remplace par deux nouveaux points marqués $y_{ij}$ et $y_{ji}$. Nous obtenons ainsi une nouvelle forêt (qui reste stable) $(T', D')$, avec deux tiges supplémentaires et $N$ arêtes, et telle que les ensembles $I(T)$ et $I(T')$ coïncident. Dénotons par $E'$ l'ensemble des arêtes de $(T', D')$ et posons $\mathcal{S}' := (T', D', \vec{\sigma})$. Alors, l'application d'évaluation universelle correspondante :

$$ev_{E'} : \mathcal{M}^{**}(P, \vec{\sigma}, \mathcal{P}) \times I(T) \longrightarrow P^{E'},$$

est transverse à $\Delta_{E'}$ de sorte que $\widetilde{\mathcal{M}}^{**}_{\mathcal{S}'}(P, \mathcal{P}) = ev_{E'}^{-1}(\Delta_{E'})$ est une variété de Banach. Considérons l'application

$$\begin{aligned} ev_{ij} : \widetilde{\mathcal{M}}^{**}_{\mathcal{S}'}(P, \mathcal{P}) &\longrightarrow P \times P \\ (\mathbf{u}, \mathbf{y}, \mathbf{x}, J_P^H) &\to (u_i(y_{ij}), u_j(y_{ji})). \end{aligned} \tag{3.2.13}$$

Nous montrons à présent que cette application est transverse à la diagonale $\Delta_P$ dans $P \times P$. On ajoute $k$ points marqués, de sorte que $\mathcal{F}_\pi$ préserve la structure d'arbre de $\mathcal{S}'(k)$. Soit

$$\mathcal{S}'_B(k) := \mathcal{F}_\pi(\mathcal{S}(k)) = (T', D'_{(+k)}, \vec{\sigma}_B := \pi_* \vec{\sigma}).$$

En adaptant le diagramme (3.2.6) à notre situation nous obtenons le carré commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{\mathcal{M}}^{**}_{\mathcal{S}'(k)}(P, \mathcal{P}) \arrow[r, "ev_{ij}"] \arrow[d, "\mathcal{F}^{univ}_\pi"] & P \times P \arrow[d, "\pi\times\pi"] \\
\widetilde{\mathcal{M}}^{*}_{\mathcal{S}'_B(k)}(B, \mathcal{J}_B) \arrow[r, "ev^B_{ij}"] & B \times B
\end{tikzcd}$$

duquel nous dérivons le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \ker d\mathcal{F}^{univ}_\pi(\mathrm{U}) \arrow[r] \arrow[d, "dev_{ij}"'] & T_{\mathrm{U}}\widetilde{\mathcal{M}}^{**}_{\mathcal{S}'(k)}(P, \mathcal{P}) \arrow[r] \arrow[d, "dev_{ij}"'] & T_{\mathrm{U}_B}\widetilde{\mathcal{M}}^{*}_{\mathcal{S}'_B(k)}(B, \mathcal{J}_B) \arrow[r] \arrow[d, "dev^B_{ij}"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & TF^2/T\Delta_F \arrow[r] & TP^2/T\Delta_P \arrow[r] & TB^2/T\Delta_B \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

où $\mathrm{U} := (\mathbf{u}, J^H_{\mathcal{P}}, \mathbf{y}, \mathbf{x})$ et $\mathrm{U}_B := \mathcal{F}^{univ}_\pi(\mathrm{U}) := (\mathbf{u}_B, J_B, \mathbf{y}, \mathbf{x})$. Nous en dérivons la suite exacte :

$$\begin{aligned}
0 \longrightarrow \quad & \ker dev_{ij}(\mathrm{U})|_{\ker d\mathcal{F}^{univ}_\pi(\mathrm{U})} \longrightarrow \ker dev_{ij}(\mathrm{U}) \longrightarrow \ker dev^B_{ij}(\mathrm{U}_B) \longrightarrow \\
\longrightarrow \quad & \operatorname{coker} dev_{ij}(\mathrm{U})|_{\ker d\mathcal{F}^{univ}_\pi(\mathrm{U})} \longrightarrow \operatorname{coker} dev_{ij}(\mathrm{U}) \longrightarrow \operatorname{coker} dev^B_{ij}(\mathrm{U}_B) \longrightarrow 0,
\end{aligned}$$

où le dernier terme doit disparaitre (cf chapitre 8 de [29]). Par conséquent, nous n'avons plus qu'à montrer que :

$$\operatorname{coker} dev_{ij}(\mathrm{U})|_{\ker d\mathcal{F}^{univ}_\pi(\mathrm{U})} = 0. \tag{3.2.14}$$

Par la symétrie due au fait que nous quotientons par le tangent à $\Delta_F$, il suffit de vérifier que $dev_{ij}(\mathrm{U})$ restreint à $\ker d\mathcal{F}^{univ}_\pi(\mathrm{U})$ est surjective sur $T_{u_i(y_{ij})} \times \{0\}$. Notons que :

$$\ker d\mathcal{F}^{univ}_\pi(\mathrm{U}) = \left\{ (\{\xi_i\}, 0, 0, 0, Y^v, f) \in T_{\mathrm{U}}\widetilde{\mathcal{M}}^{**}_{\mathcal{S}'(k)}(P, \mathcal{P}) \,|\, \xi_i \in W^{1,p}(u_i^* TP^v),\ \forall i \in I \right\}$$

d'où , par définition de $ev_{ij}$ :

$$dev_{ij}(\mathrm{U})(\{\xi_i\}, 0, 0, 0, Y^v, f) = (\xi_i(y_{ij}), \xi_j(y_{ji})).$$

Maintenant, soit $(v, 0) \in T_{u_i(y_{ij})} \times \{0\}$ et supposons que la $i$-ème composante n'est pas fantôme. Choisissons alors n'importe quel $\xi_i \in \mathcal{X}^{1,p,v}_{P,u_i}$ tel que $\xi_i(y_{ij}) = v$. Par le même argument que dans le lemme précédent, il existe $Y^v$ ou $f$ à support dans un voisinage de $P$ assez petit de sorte qu'il n'intersecte l'image d'aucune autre composante, ainsi qu'un champ de vecteurs $\zeta \in W^{1,p}(u_i^* TP^v)$ tel que $\zeta(y_{ij}) = 0$ lorsque $iEj$ et $(\xi_i - \zeta, 0, Y^v, 0)$ ou bien $(\xi_i - \zeta, 0, 0, f)$ se trouve dans ker $\widetilde{D}_{(u_i, J_P^H)}$. Dès lors, on pose

$$\xi_j = 0 \quad \forall j \neq i.$$

Si $u_i$ est une composante fantôme, on considère $I_{\mathrm{gh}}(\Sigma_i)$ le sous-ensemble de $I$ correspondant au plus grand sous-arbre de $T'$, contenant $\Sigma_i$ et étant composé uniquement de composantes fantômes. Pour tout $j \in I_{\mathrm{gh}}(\Sigma_i)$ nous devons avoir $\xi_j = v$. Soient à présent, tous les éléments $k \in I \backslash I_{\mathrm{gh}}(\Sigma_i)$ tels qu'il existe $j \in I_{\mathrm{gh}}(\Sigma_i)$ pour lequel $kEj$ et dénotons cet ensemble par $K$. Toutes ces composantes ont un point en commun dans l'image de la courbe stable, précisément, $u_i(\Sigma_i) = u_i(y_{ij})$. On répéte alors l'argument présenté dans le paragraphe précédent pour toute les composantes dans $K$, et on pose :

$$\xi_j = 0 \quad \forall j \notin K \sqcup I_{\mathrm{gh}}(\Sigma_i).$$

$\square$

Considérons maintenant l'application

$$p^{\mathcal{P}} : \widetilde{\mathcal{M}}^{**}_S(P, \mathcal{P}) \longrightarrow \mathcal{P}.$$

Nous avons par définition que :

$$\widetilde{\mathcal{M}}^{**}_S(P, J_P^H) := (p^{\mathcal{P}})^{-1}(J_P^H).$$

Nous allons montrer que cet ensemble est une variété pour un choix générique de structure fibrée $J_P^H$. Explicitons d'abord ce que nous entendons par générique dans ce cas précis.

**Définition 3.2.1.** *$J_B \in \mathcal{J}(B,\omega_B)$ est dit* **régulier** *pour la donnée de strate $\mathcal{S}_B = (T_B, D_B, \vec{\sigma}_B)$ si les conditions suivantes sont satisfaites :*

i) *$J_B \in \mathcal{J}_{B,rég}(\sigma_{B,i})$ pour tout élément $\sigma_{B,i} \in \vec{\sigma}_B$.*

ii) *l'application d'évaluation $ev_{E_B}$ est transverse à $\Delta_{E_B}$.*

*L'ensemble de toutes ces structures régulières sera dénoté par $\mathcal{J}_{B,reg}(\mathcal{S}_B)$.*

*Un triplet $(J_B, J, H) \in \mathcal{P}$ est dit* régulier *pour la donnée de strate $\mathcal{S} = (T, D, \vec{\sigma})$ si les conditions suivantes sont satisfaites :*

i) *$(J_B, H) \in \mathcal{V}_{reg}(J,\sigma)$ pour tout élément $\sigma \in \vec{\sigma}$ tel que $\pi_*\sigma = \sigma_B \neq 0$,*

ii) *$J \in \mathcal{J}_{reg}^{vert}(\omega,\sigma)$ pour tout $\sigma \in H_2(P;\mathbb{Z})$ tel que $\pi_*\sigma = 0$,*

iii) *l'application d'évaluation $ev_E$ est transverse à $\Delta_E$.*

*L'ensemble de tout ces triplets réguliers sera dénoté par $\mathcal{P}_{reg}(\mathcal{S})$.*

**Remarque 3.2.1.** *On voit aisément par la remarque 3.2.14, que ces définitions sont indépendantes des points marqués. Autrement dit, elles ne dépendent que de la structure d'arbre et de l'information homologique de la donnée de strate, mais pas sur les tiges.*

Observons que si $(J_B, J, H)$ est régulier pour $\mathcal{S}$ alors $J_B$ est régulière pour $\mathcal{S}_B := \mathcal{F}_\pi(\mathcal{S})$. Fixons maintenant $J_B \in \mathcal{J}_{B,reg}(\mathcal{S}_B)$ et soit $\overline{\mathbf{u}}_B := (\mathbf{u}_B, \mathbf{y}_B, \mathbf{x})$ dénotant un élément dans $\widetilde{\mathcal{M}}^*_{\mathcal{S}_B}(B, J_B)$.

**Définition 3.2.2.** *Une paire $(J, H)$ est régularisante pour la fibre $\mathcal{F}_\pi^{-1}(\mathbf{u}_B, \mathbf{y}_B, \mathbf{x})$ et pour la donnée de strate $\mathcal{S}$, si pour tout*

$$(\mathbf{u}, \mathbf{y}, \mathbf{x}) \in \mathcal{F}_\pi^{-1}(\overline{\mathbf{u}}_B) \cap \widetilde{\mathcal{M}}^{**}_{\mathcal{S}}(P, J_P^H),$$

*on a :*

i) *$H \in \mathcal{H}_{reg}(u_{B,i}, J_B, J; \sigma_i)$ pour tout $i \in I_+$,*

ii) *$J \in \mathcal{J}_{reg}^{vert}(\omega, \sigma_i)$ pour tout $i \in I_0$,*

iii) *L'application d'évaluation $ev_E$ restreinte à $\mathcal{F}_\pi^{-1}(\overline{\mathbf{u}}_B)$ est transverse à la diagonale $\Delta_E \cap F^E$ dans $F^E$. L'ensemble de toutes ces paires régulières est noté $\mathcal{JH}_{reg}(\overline{\mathbf{u}}_B, J_B, \mathcal{S})$.*

Nous avons le théorème suivant :

**Théorème 3.2.4.** *Soit $\mathcal{S} = (T, D, \vec{\sigma})$ une donnée de strate où $(T, D)$ est ici un arbre avec l-tiges, et soit $\mathcal{F}_\pi(\mathcal{S}) = \mathcal{S}_B$ sa projection.*

1) *Si $(J, J_B, H) \in \mathcal{P}_{reg}(\mathcal{S})$ alors l'espace de modules $\mathcal{M}^{**}_{\mathcal{S}}(P, J^H_P)$ est une variété orientée lisse, de dimension*

$$\dim(\mathcal{M}^{**}_{\mathcal{S}}(P, J^H_P)) = 2n_P + 2\sum_{i\in I} c_1(\sigma_i) + 2l - 2|E| - 6$$

*et l'ensemble $\mathcal{P}_{reg}(\mathcal{S})$ est de deuxième catégorie dans $\mathcal{P}$.*

2) *Fixons $J_B \in \mathcal{J}_{B,reg}(\mathcal{S}_B)$ et soit $\{\overline{\mathbf{u}}_{B,\alpha} := (\mathbf{u}_{B,\alpha}, \mathbf{y}_{B,\alpha}, \mathbf{x}_\alpha)\}_\alpha$ un nombre dénombrable d'éléments de $\mathcal{M}^{*}_{\mathcal{S}_B}(B, J_B)$, alors pour tout $\overline{\mathbf{u}}_{B,\alpha}$ l'espace*

$$\mathcal{F}_\pi^{-1}(\overline{\mathbf{u}}_{B,\alpha}) \cap \mathcal{M}^{**}_{\mathcal{S}}(P, J^H_P)$$

*est une variété orientée de dimension :*

$$2n_F + 2\sum_{i\in I} c^v_1(\sigma_i) - 2|E| + 2|E_B|.$$

*De plus, l'ensemble*

$$\mathcal{JH}_{reg}(\{\overline{\mathbf{u}}_{B,\alpha}\}_\alpha, J_B, \mathcal{S}) := \bigcap_\alpha \mathcal{JH}_{reg}(\overline{\mathbf{u}}_{B,\alpha}, J_B, \mathcal{S}),$$

*est de deuxième catégorie.*

**Preuve:** 1) Soit $E$ l'ensemble des arêtes de $T$ et $I$ l'ensemble indiçant les sommets de $T$. Que $\mathcal{M}^{**}_{\mathcal{S}}(P, J^H_P)$ soit une variété orientée suit du fait que $ev_E^{-1}(\Delta_E) = \widetilde{\mathcal{M}}^{**}_{\mathcal{S}}(P, J^H_P)$ est une variété lisse orientée par le théorème des fonctions implicites ainsi que le fait que $G_{\mathcal{S}}$ agit librement et proprement sur $\widetilde{\mathcal{M}}^{**}_{\mathcal{S}}(P, J^H_P)$ par des difféomorphismes qui préservent l'orientation. Nous calculons sa dimension. Par transversalité nous avons :

$$\begin{aligned}
\dim ev_E^{-1}(\Delta_E) &= \dim \Delta_E - \dim P^E + \dim \widetilde{\mathcal{M}}^{**}(P, \vec{\sigma}, J^H_P) + \dim I(T) \\
&= 2n_P + 2\sum_{i\in I} c_1(\sigma_i) + 4|E| + 2l.
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\dim \mathcal{M}^{**}_{\mathcal{S}}(P, J^H_P) &= 2n_P + 2\sum_{i\in I} c_1(\sigma_i) + 4|E| + 2l - \dim G_{\mathcal{S}} \\
&= 2n_P + 2\sum_{i\in I} c_1(\sigma_i) + 2l - 6 - 2|E|.
\end{aligned}$$

Pour la deuxième partie, soit $r > 2$. Notons pour commencer que l'application d'évaluation $ev_E$ est transverse à la diagonale, de sorte que $\mathcal{M}_{\mathcal{S}}^{**}(P, \mathcal{P}^r)$ est une variété de Banach (séparable). Considérons alors l'application :

$$p^{\mathcal{P}^r} : \mathcal{M}_{\mathcal{S}}^{**}(P, \mathcal{P}^r) \longrightarrow \mathcal{P}^r.$$

On remarque que c'est une application Fredholm de classe $C^{r-1}$ dont les valeurs régulières sont données par $\mathcal{P}_{reg}(\mathcal{S})$. Le cas $C^\infty$ découle de l'argument de Taubes.

La première partie de 2) est claire. La dimension est obtenue comme suit :

$$\begin{aligned}
\dim \mathcal{F}_\pi^{-1}(\overline{\mathrm{u}}_{B,\alpha}) \cap \mathcal{M}_{\mathcal{S}}^{**}(P, J_P^H) &= \dim \mathcal{M}_{\mathcal{S}}^{**}(P, J_P^H) - \dim \mathcal{M}_{\mathcal{S}_B}^{*}(B, J_B) \\
&= 2n_P + 2\sum_{i\in I} c_1^{TP}(\sigma_i) + 2l - 6 - 2|E| \\
&- \ (2n_B + 2\sum_{i\in I_+} c_1^{TB}(\sigma_{B,i}) + 2l - 6 - 2|E_B|) \\
&= 2n_F + 2\sum_{i\in I} c_1^{v}(\sigma_i) - 2|E| + 2|E_B|.
\end{aligned}$$

On note dans ce calcul qu'aucune reparamétrisation n'est effectuée sur les composantes racine étant donné que nous ne considérons dans ce cas que les déformations à valeurs verticales. La seconde partie découle de la remarque 3.2.3 et est alors obtenue par une copie de l'argument utilisé dans la partie ii) du théorème 2.3.1. □

Nous terminerons ce chapitre en discutant très brièvement de l'invariance des espaces de modules ci-dessus sous changement de structures régulières.

**Définition 3.2.3.** *Soient $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}_B$ des données de strates de courbes pseudo-holomorphes dans $P$ et $B$ respectivement.*

(i) *Soient $J_{B,0}$ et $J_{B,1}$, deux éléments de $\mathcal{J}_{B,reg}(B, \omega_B, \sigma_B)$. Soit $\gamma_B$ un chemin lisse de $\mathcal{J}_B(J_{B,0}, J_{B,1})$. On dit que $\gamma_B$ est régulier si $\gamma_B$ instersecte transversalement $p^{\mathcal{J}_B}$. Ces chemins réguliers seront désignés par $\mathcal{J}_{B,reg}(\mathcal{S}_B; J_{B,0}, J_{B,1})$.*

(ii) *Soient $J_{P,0}^H$ et $J_{P,1}^H$, deux éléments de $\mathcal{P}_{reg}(\mathcal{S})$. Soit $\gamma \in \mathcal{P}(J_{P,0}^H, J_{P,1}^H)$. On dira que $\gamma$ est régulier si $\gamma$ intersecte transversalement $p^{\mathcal{P}}$. Ces chemins réguliers seront dénotés par $\mathcal{P}_{reg}(\mathcal{S}; J_{P,0}^H, J_{P,1}^H)$.*

(iii) *Soit* $J_B \in \mathcal{J}_{B,reg}(\mathcal{S}_B)$ *et soit* $u_B \in \widetilde{\mathcal{M}}^*_{\mathcal{S}_B}(B, J_B)$. *Considérons* $(J,H)_0$ *et* $(J,H)_1$, *deux éléments dans* $\mathcal{JH}_{reg}(u_B, J_B, \mathcal{S})$. *Soit* $\gamma \in \mathcal{JH}((J,H)_0, (J,H)_1)$. *Nous dirons que* $\gamma$ *est régulier si* $\gamma$ *intersecte transversalement l'application* $p_{23} \circ p^{\mathcal{P}}$ *restreinte à* $(\mathcal{F}_\pi^{univ})^{-1}(u_B, J_B)$. *Ces chemins réguliers seront dénotés par* $\mathcal{JH}_{reg}(u_B, J_B, \mathcal{S}; (J,H)_0, (J,H)_1)$.

On remarque encore une fois que tout chemin régulier dans $\mathcal{P}$ pour la strate $\mathcal{S}$ se projette sur un chemin régulier dans $\mathcal{J}_B$ pour la strate $\mathcal{F}_\pi(\mathcal{S})$. Etant donnés $\gamma \in \mathcal{P}(J^H_{P,0}, J^H_{P,1})$ et $\gamma_B \in \mathcal{J}_B(J_{B,0}, J_{B,1})$ on pose respectivement :

$$\widetilde{\mathcal{W}}^{**}_{\mathcal{S}}(P, \{J^H_{P,s}\}_s) := \gamma^* \widetilde{\mathcal{M}}^{**}_{\mathcal{S}}(P, \mathcal{P}) \quad \text{et} \quad \widetilde{\mathcal{W}}^*_{\mathcal{S}_B}(B, \{J_{B,s}\}_s) := \gamma_B^* \widetilde{\mathcal{M}}^*_{\mathcal{S}_B}(B, \mathcal{J}_B).$$

Si on fixe $J_B \in \mathcal{J}_{B,reg}(\mathcal{S}_B)$ et $u_B \in \widetilde{\mathcal{M}}^*_{\mathcal{S}_B}(B, J_B)$, et étant donné $\gamma$ un élément de $\mathcal{JH}((J,H)_0, (J,H)_1)$, on pose

$$\widetilde{\mathcal{W}}^{**}_{\mathcal{S}}(\mathcal{F}_\pi^{-1}(u_B), J_B, \{(J,H)_s\}_s) := \gamma^* (\mathcal{F}_\pi^{univ})^{-1}(u_B, J_B).$$

Notons que comme auparavant, le groupe des reparamétrisations $G_{\mathcal{S}}$ agit sur ces nouveaux espaces. De façon similaire aux propositions 2.3.6 et 2.3.7, nous avons la proposition suivante dont nous omettrons la preuve :

**Proposition 3.2.5.** 1) *Soient* $J^H_{P,0}, J^H_{P,1} \in \mathcal{P}_{reg}(\mathcal{S})$ *et soit* $\gamma$ *un chemin dans* $\mathcal{P}$ *avec extrémités* $J^H_{P,0}$ *et* $J^H_{P,1}$. *Supposons que* $\gamma \in \mathcal{P}_{reg}(\mathcal{S}; J^H_{P,0}, J^H_{P,1})$. *Alors l'espace de modules*

$$\mathcal{W}^{**}_{\mathcal{S}}(P, \{J^H_{P,s}\}_s) := \widetilde{\mathcal{W}}^{**}_{\mathcal{S}}(P, \{J^H_{P,s}\}_s)/G_{\mathcal{S}},$$

*est une variété orientée à bord de dimension* $\dim(\mathcal{M}^{**}_{\mathcal{S}}(P, J^H_{P,0})) + 1$ *dont la frontière est donnée par :*

$$\partial \mathcal{W}^{**}_{\mathcal{S}}(P, \{J^H_{P,s}\}_s) = \mathcal{M}^{**}_{\mathcal{S}}(P, J^H_{P,0}) \sqcup -\mathcal{M}^{**}_{\mathcal{S}}(P, J^H_{P,1}).$$

*De plus, l'ensemble* $\mathcal{P}_{reg}(\mathcal{S}; J^H_{P,0}, J^H_{P,1})$ *est de deuxième catégorie dans* $\mathcal{P}(J^H_{P,0}, J^H_{P,1})$.

2) *Soit* $J_B \in \mathcal{J}_{B,reg}(\mathcal{S}_B)$ *fixé et soit* $u_B \in \mathcal{M}^*_{\mathcal{S}_B}(B, J_B)$. *Supposons que* $\gamma \in \mathcal{JH}_{reg}(\mathcal{S}; (J,H)_0, (J,H)_1)$. *Alors l'espace de modules*

$$\mathcal{W}^{**}_{\mathcal{S}}((\mathcal{F}_\pi^{univ})^{-1}(u_B, J_B), \{(J,H)_s\}_s) := \widetilde{\mathcal{W}}^{**}_{\mathcal{S}}((\mathcal{F}_\pi^{univ})^{-1}(u_B, J_B), \{(J,H)_s\}_s)/G_{\mathcal{S}},$$

*est une variété orientée à bord de dimension* $\dim(\mathcal{F}_{\pi}^{-1}(u_B) \cap \mathcal{M}^{**}(P, J_{P,0}^H)) + 1$ *et de frontière :*

$$\mathcal{F}_{\pi}^{-1}(u_B) \cap \mathcal{M}^{**}(P, \sigma; J_{P,0}^H) \sqcup -\mathcal{F}_{\pi}^{-1}(u_B) \cap \mathcal{M}^{**}(P, \sigma; J_{P,1}^H).$$

*Qui plus est, l'ensemble* $\mathcal{JH}_{reg}(u_B, J_B, \mathcal{S}; (J,H)_0, (J,H)_1)$ *est de deuxième catégorie dans* $\mathcal{JH}((J,H)_0, (J,H)_1)$.

# Chapitre 4

## LA FORMULE PRODUIT

Dans ce chapitre nous allons démontrer que pour une fibration Hamiltonienne, certains invariants de Gromov-Witten de l'espace total sont obtenus comme produit d'invariants (de Gromov-Witten) de la base avec ceux d'une fibration hamiltonienne au-dessus de $S^2$. Ces invariants comptent, par définition ([**29**]), le nombre algébrique de courbes holomorphes dans la variété symplectique en question, avec points marqués, qui représentent une classe d'homologie donnée, et qui intersectent transversalement certains cycles de la variété en les-dits points marqués. Dans le contexte des fibrations Hamiltoniennes, tout se déroule essentiellement comme auparavant. La seule difficulté ici, réside en ce que nous devons effectuer le dénombrement de façon compatible avec la structure de fibration. En particulier, nous devons montrer que les évaluations en les points marqués (des courbes holomorphes) dans la base, dans l'espace total ainsi que dans un certain fibré Hamiltonien au-dessus de $S^2$, sont toutes les trois, génériquement, des pseudo-cycles qui sont compatibles avec la projection. Nous rappelons donc pour commencer, ce qu'est un pseudo-cycle.

### 4.1. Pseudo-cycles et fibrations Hamiltoniennes

Nous rappelons la notion de pseudo-cycle donnée dans [**29**], et nous mettons en valeur certains pseudo-cycles qui apparaîtront dans la formule produit.

**Définition 4.1.1.** *Un* ***pseudo-cycle****, ou cycle, $d$-dimensionnel dans $P$ est une paire $(V, g)$ où $V$ est une variété orientée de dimension $d$, et $g$ est une application* *lisse*

$$g : V \longrightarrow P$$

*telle que la fermeture de $g(V)$ est compacte, et dont l'oméga-limite*

$$\Omega_g := \bigcap_{K \subset V,\, K \ \text{compact}} \overline{g(V \backslash K)}$$

*est de codimension au moins 2 dans $P$. De plus, on dira que deux pseudo-cycles d-dimensionnels, $(V_1, g_1)$ et $(V_2, g_2)$ sont bordants s'il existe un pseudo-cycle $d+1$-dimensionnel $(W, h)$, de frontière $\partial W = V_1 \sqcup -V_2$, tel que $h|_{V_i} = g_i$ pour $i = 1, 2$. et $\dim \Omega_h \leq d - 1$.*

Lorsque le domaine $V$ du pseudo-cycle est compris, nous écrirons simplement $f$ à la place de $(V, f)$. L'ensemble des classes d'équivalence de pseudo-cycles d-dimensionnels dans $P$ pour la relation de bordisme peut être donné une structure de $\mathbb{Z}$-module. La somme de deux telles classes est obtenue en considérant l'union disjointe de pseudo-cycles $d$-dimensionnels, et l'inverse est donné en renversant les orientations. Enfin, l'unité est donnée par le pseudo-cycle vide.

A présent, supposons que $(F, \omega) \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} B$ est une fibration Hamiltonienne (en fait nous n'avons besoin que de la structure de fibration dans ce qui va suivre.). On voit aisément que tout pseudo-cycle $d$-dimensionnel $(f, V)$ dans la fibre de référence, $F$ de $P$, définit $d$ pseudo-cycle de l'espace total simplement en composant $f$ avec le plongement $\iota_F^P : F \longrightarrow P$. Autrement dit, ce pseudo-cycle est donné par $(\iota_F^P \circ f, V)$. Remarquons aussi que des cycles bordants dans $F$ sont envoyés sur des cycles bordants de $P$ via $\iota_F^P$. Observons aussi que tout pseudocycle de $B$ induit un pseudocycle dans $P$ donné comme suit. Soit $(f, V)$ un pseudo-cycle d-dimensionnel de $B$, nous avons le diagramme de pull-back :

$$\begin{tikzcd} f^*P \arrow[r, "\overline{f}"] \arrow[d, "\pi'"] & P \arrow[d, "\pi"] \\ V \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

**Lemme 4.1.1.** *Étant donné $(f, V)$ ci-dessus, la paire $(\overline{f}, f^*P)$ est un pseudo-cycle de dimension $d + \dim F$. De plus, si $(f, V)$ est bordant à $(f', V')$, alors $(\overline{f}, f^*P)$ est bordant à $(\overline{f}', f'^*P)$.*

**Preuve:** Tout d'abord, notons que la fermeture $\overline{f}(f^*P)$ est donnée par la fermeture de $\pi^{-1}(f(V))$, et est par là même compacte étant donné que $\overline{f(V)}$ l'est. Desurcroît, tout sous-ensemble compact $K \subset f^*P$ est contenu dans $\pi'^{-1}(\pi'(K))$ qui est aussi compact car $\pi'$ est propre. Par conséquent, l'oméga-limite de $\overline{f}$ se réduit à :

$$\Omega_{\overline{f}} = \bigcap_{K \subset V,\ K \text{ compact}} \overline{\overline{f}(f^*P \backslash \pi'^{-1}(K))}$$

et nous avons que :

$$\begin{aligned}
\pi(\Omega_{\overline{f}}) &= \bigcap_{K \subset V,\ K \text{ compact}} \overline{\pi \circ \overline{f}(f^*P \backslash \pi'^{-1}(K))} \\
&= \bigcap_{K \subset V,\ K \text{ compact}} \overline{f \circ \pi'(f^*P \backslash \pi'^{-1}(K))} \\
&= \bigcap_{K \subset V,\ K \text{ compact}} \overline{f(V \backslash K)}.
\end{aligned}$$

Dès lors, l'oméga-limite de $\overline{f}$ est contenue dans $\pi^{-1}(\Omega_f)$ et est donc de dimension au plus

$$\dim \Omega_f + \dim F \leq d + \dim F - 2.$$

Pour la dernière affirmation, supposons que $(F, W)$ est un bordisme entre $(f, V)$ et $(f', V')$. Alors, un bordisme entre $(\overline{f}, f^*P)$ et $(\overline{f}', f'^*P)$ est obtenu en considérant simplement le pull-back $(\overline{F}, F^*P)$. Nous avons directement que :

$$\partial F^*P = f^*P \sqcup -f'^*P,$$

et un argument similaire à celui utilisé ci-dessus nous donne que l'oméga-limite associée est de dimension au plus $d + \dim F - 1$.

$\square$

**Remarque 4.1.1.** *Une observation importante à faire ici, est que toute classe d'homologie singulière peut être représentée par un pseudo-cycle (voir* [29]*).*

Désignons par $H_*(B), H_*(P)$ et $H_*(F)$ les homologies singulières modulo torsion des espaces correspondants. Nous serons amenés à considérer des classes dans $H_*(P)$, provenant soit de classes dans $H_*(B)$ soit de classes dans $H_*(F)$. Plus précisément, étant donnés des classes $c_1^B, ..., c_l^B \in H_*(B)$ et $c_1^F, ..., c_l^F \in H_*(F)$ telles que :

$$\begin{cases} c_i^B = pt & \text{pour } i = 1, ..., m \text{ et } 0 \leq m \leq l, \\ c_i^F = [F] & \text{pour } i = m+1, ..., l, \text{ où } m \text{ est comme plus haut,} \end{cases} \tag{4.1.1}$$

nous considérerons les classes $c_1^P, ..., c_l^P \in H_*(P)$ satisfaisant :

$$\begin{cases} c_i^P = \iota_F^P(c_i^F) & \text{pour } i = 1, ..., m, \\ c_i^P = \pi^{-1}(c_i^B) & \text{pour } i = m+1, ..., l. \end{cases} \tag{4.1.2}$$

Soient $(V_i^B, f_i^B)$, $(V_i^F, f_i^F)$ et $(V_i^P, f_i^P)$, $i = 1, ..., l$, des pseudo-cycles représentant respectivement les classes ci-dessus. À cause de la condition (4.1.1), nous avons que $(V_i^B, f_i^B) = (pt, f_i^B)$ pour tout $i = 1, ..., m$ et $(V_i^F, f_i^F) = (F, id_F)$ lorsque $i = m+1, ..., l$. De plus, par (4.1.2), nous voyons que le pseudo-cycle $(V_i^P, f_i^P)$ peut être donné soit par $(V_i^F, \iota(f_i^F))$ dès que $i = 1, ..., m$, soit par $((f_i^B)^* P, \overline{f}_i^B)$, sinon. Maintenant, considérons les cycles produits associés :

$$\begin{cases} (\mathcal{C}_B, f^B) = \prod_{i=1}^l (V_i^B, f_i^B), \\ (\mathcal{C}_F, f^F) = \prod_{i=1}^l (V_i^F, f_i^F), \\ (\mathcal{C}_P, f^P) = \prod_{i=1}^l (V_i^P, f_i^P). \end{cases} \tag{4.1.3}$$

Ceux-ci représentent les classes d'homologie produits $c_1^B \otimes \ldots \otimes c_l^B \in H_*(B^l)$, $c_1^F \otimes \ldots \otimes c_l^F \in H_*(F^l)$ et $c_1^P \otimes \ldots \otimes c_l^P \in H_*(P^l)$. Plus tard ces cycles produits seront ceux par lesquels nous intersecterons les applications d'évaluation utilisées pour définir les invariants de Gromov-Witten. Afin d'obtenir des nombres nous devrons supposer que ces intersections soient transverses :

**Définition 4.1.2.** *Soient $(f_i, V_i)$, $i = 1, 2$, des pseudo-cycles dans $P$. Ces cycles sont dits* ***fortement transverses*** *si*

i) *$(f_1, f_2) \pitchfork \Delta$, où $\Delta \subset P^2$ désigne la diagonale,*

ii) *$\overline{Im f_i} \cap \Omega_{f_j} = \emptyset$ pour $i \neq j$.*

Lorsque $f_1$ et $f_2$ sont tels, l'ensemble $(f_1, f_2)^{-1}(\Delta)$ est une sous-variété compacte de $V_1 \times V_2$. Si, de surcroît, les dimensions $d_i$ satisfont $d_1 + d_2 = 2n_P$, alors

$(f_1, f_2)^{-1}(\Delta)$ est une ensemble fini de points isolés qui, comptés en utilisant les orientations, nous donnent un nombre qui est un invariant des classes de bordisme de $(f_i, V_i)$, $i = 1, 2$.

**Remarque 4.1.2.** *Un résultat standard ([29]) nous assure que la forte transversalité est génériquement réalisée dans les classes de bordisme des pseudo-cycles considérés.*

Finalement, nous terminons cette sous-section avec une petite remarque sur les orientations des pseudo-cycles produits que nous avons définis ci-dessus. Nous avons la suite exacte :

$$0 \longrightarrow df^F(T\mathcal{C}_F) \xrightarrow{(\iota_F^P)^l} df^P(T\mathcal{C}_P) \xrightarrow{\pi^l} df^B(T\mathcal{C}_B) \longrightarrow 0 \ , \qquad (4.1.4)$$

nous donnant l'identification entre les fibrés déterminant associés :

$$\det df^P(T\mathcal{C}_P) \cong \det df^B(T\mathcal{C}_B) \otimes \det df^F(T\mathcal{C}_F). \qquad (4.1.5)$$

Ainsi, si les cycles $(\mathcal{C}_B, f^B)$ et $(\mathcal{C}_F, f^F)$ sont positivement orientés, le cycle $(\mathcal{C}_P, f^P)$ l'est aussi.

## 4.2. Les applications d'évaluation sont des pseudo-cycles

Nous nous intéressons à présent à certains pseudo-cycles induits par les espaces de modules de courbes holomorphes munies de $l$-points marqués. Ces pseudo-cycles sont donnés par l'évaluation des applications holomorphes en question, en les-dits points marqués. Dans [29] il est montré que cette évaluation est véritablement un pseudo-cycle sous certaines conditions, en l'occurrence celle de semi-positivité.

Dans le contexte qui nous intéresse, nous sommes concernés par les applications d'évaluation suivantes :

$$ev^P_{l,J_P^H} : \mathcal{M}^{**}_{0,l}(P, J_P^H, \sigma) \longrightarrow P^l \ , \quad (u, \mathrm{x}) \mapsto (u(x_1), ..., u(x_l))$$

et

$$ev^B_{l,J_B} : \mathcal{M}^{*}_{0,l}(B, J_B, \sigma_B) \longrightarrow B^l \ , \quad (u_B, \mathrm{x}) \mapsto (u_B(x_1), ..., u_B(x_l)).$$

A partir de maintenant $\sigma_B$ sera supposée non nulle. Soit $(u_B, \mathbf{x}) \in \widehat{\mathcal{M}}^*_{0,l}(B, J_B, \sigma_B)$, alors nous avons le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
\pi^{-1}(u_B, \mathbf{x})/PSL_2(\mathbb{C}) \arrow[r] \arrow[d, "ev_{(u_B,\mathbf{x})}"] & \mathcal{M}^{**}_{0,l}(P, J^H_P, \sigma) \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "ev^P_{l,J^H_P}"] & \mathcal{M}^*_{0,l}(B, J_B, \sigma_B) \arrow[d, "ev^B_{l,J_B}"] \\
F^l \arrow[r] & P^l \arrow[r, "\pi^l"] & B^l
\end{tikzcd} \tag{4.2.1}$$

où

$$ev_{(u_B,\mathbf{x})} : \pi^{-1}(u_B, \mathbf{x}) \longrightarrow F^l, \quad u \mapsto (u(x_1), ..., u(x_l)) \in \prod_{i=1}^{l} F_{u_B(x_i)}.$$

Nous allons montrer que sous certaines conditions, ces trois évaluations sont des pseudo-cycles. Le point essentiel ici est de pouvoir utiliser la transversalité établie dans le chapitre précédent, afin de montrer que les espaces de modules sont des espaces stratifiés dont les strates inférieures, i.e celles réductibles ou celles contenant au moins une arête dans leur description en terme d'arbres, sont de codimension au moins deux. Nous devrons pour ce faire imposer certaines conditions quelques peu had hoc, mais qui s'avèrent nécessaires si l'on ne se permet pas de perturber davantage l'opérateur de Cauchy-Riemann.

Avant toute chose voici quelques ensembles de paramètres importants. On définit l'ensemble des structures presque complexes régulières de $B$ qui sont $\omega_B$ compatibles :

$$\mathcal{J}_{B,reg}(\omega_B) := \bigcap_{\mathcal{S}_B} \mathcal{J}_{B,reg}(\omega_B, \mathcal{S}_B).$$

Etant donné qu'il n'y a qu'un nombre dénombrable de structures d'arbres ainsi que de données homologiques pour l'ensemble des données de strate, nous avons que cet ensemble est de seconde catégorie. Similairement, posons :

$$\mathcal{P}_{reg}(\omega, \omega_B, \tau) := \bigcap_{\mathcal{S}} \mathcal{P}_{reg}(\mathcal{S}).$$

Pour $J_B \in \mathcal{J}_{B,reg}(\omega_B)$ fixé et un certain élément $u_B \in \mathcal{M}^*(B, \sigma_B, J_B)$, on définit de même :

$$\mathcal{JH}_{reg}(u_B, J_B) := \bigcap_{\mathcal{S}} \mathcal{JH}_{reg}(u_B, J_B, \mathcal{S}),$$

où $\mathcal{S}$ se projette via $\mathcal{F}_\pi$ sur les strates n'ayant qu'un unique sommet dans sa structure d'arbre avec tiges. Par le théorème 3.2.4 ces deux derniers ensembles sont de deuxième catégorie. Nous montrons désormais que $ev^B_{l,J_B}$ est un pseudo-cycle.

**Lemme 4.2.1.** *Soit $\sigma_B \in H_2(B;\mathbb{Z})$ et supposons que $\sigma_B$ n'admet que des décompositions effectives irréductibles pour un certain $J_B \in \mathcal{J}_{B,reg}(\omega_B)$. Alors l'application d'évaluation $ev^B_{l,J_B}$ est un pseudo-cycle. De plus, changer de structure presque complexe régulière $J_B$ à l'intérieur de $\mathcal{J}_{irr}(\sigma_B)$ via des chemins réguliers, induit un bordisme entre les espaces de modules correspondants.*

**Preuve:** Fixons $J_B \in \mathcal{J}_{B,reg}(\omega_B)$. Par le lemme 3.1.5, il existe seulement un nombre fini de strates dans $\overline{\mathcal{M}}_{0,l}(B, J_B, \sigma_B)$. De surcroît, étant donné que $\sigma_B$ n'admet que des décompositions effectives irréductibles, toutes les strates $\mathcal{M}_{\mathcal{S}_B}(B, J_B)$ possibles, ne sont composées que d'éléments irreductibles. Par cela ainsi que par compacité de Gromov, l'oméga-limite de $ev^B_{l,J_B}$ est donnée par :

$$\Omega_{ev^B_{l,J_B}} = \bigcup_{\mathcal{S}_B} ev^B_{l,J_B}(\mathcal{M}^*_{\mathcal{S}_B}(B, J_B)) = \bigcup_{\mathcal{S}_B} ev^B_{l,J_B}(\mathcal{M}_{\mathcal{S}_B}(B, J_B)),$$

où l'union est prise sur toutes les données de strates avec au moins une arête. Mais, si $|E_B|$ représente le nombre d'arêtes de la structure d'arbre de $\mathcal{S}_B$, nous avons $|E_B| > 0$ et par conséquent :

$$\dim \mathcal{M}_{\mathcal{S}_B}(B, J_B) = 2n_B + 2c_1(\sigma_B) + 2l - 2|E_B| - 6 \leq \dim \mathcal{M}_{0,l}(B, J_B, \sigma_B) - 2,$$

d'où $ev^B_{l,J_B}$ est en effet un pseudo-cycle de dimension, $2n_B + 2c_1(\sigma_B) + 2l - 6$. On vérifie à présent l'indépendance de la structure presque complexe régulière via les chemins réguliers contenus dans une composante connexe par arc de $\mathcal{J}_{irr}(\sigma_B)$. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $\mathcal{J}_{irr}(\sigma_B)$ est connexe par arc. Soit $J_{B,t}$ un chemin régulier entre les structures presque complexes régulières $J_{B,0}$ et $J_{B,1}$ telles que

$$J_{B,0}, J_{B,1} \in \mathcal{J}_{irr}(\sigma_B) \cap \mathcal{J}_{B,reg}(\omega_B), \qquad \{J_{B,t}\} \in \mathcal{J}_{B,reg}(J_{B,0}, J_{B,1}) \cap \mathcal{J}_{irr}(\sigma_B).$$

Dans ce cas, toute application stable apparaissant comme limite géométrique d'une suite d'éléments de

$$\mathcal{W}^*_{0,l}(B, \sigma_B, \{J_{B,t}\}) = \mathcal{W}_{0,l}(B, \sigma_B, \{J_{B,t}\}),$$

doit être irréductible. Dès lors, en argumentant comme ci-dessus, toutes les strates de $\overline{\mathcal{W}}_{0,l}(B,\sigma_B,\{J_{B,t}\})$ ont codimension au moins 2 par rapport à la strate supérieure composée des courbes simples. Ainsi l'application d'évaluation paramétrique :

$$ev^B_{l,\{J_{B,t}\}} : \mathcal{W}^*_{0,l}(B,\sigma_B,\{J_{B,t}\}) \longrightarrow B^l$$

est un pseudo-cycle de dimension $2n_B + 2c_1(\sigma_B) + 2l - 6 + 1$, constituant un bordisme entre $ev^B_{l,J_{B,0}}$ et $ev^B_{l,J_{B,0}}$. □

**Remarque 4.2.1.** *Notons que si $\sigma_B$ est primitive nous pouvons abandonner la restriction à $\mathcal{J}_{irr}(\sigma_B)$ dans la preuve.*

Nous montrons à présent que les autres applications d'évaluation dans le diagramme (4.2.1) sont elles aussi des pseudo-cycles. Pour ce faire, nous aurons besoin d'imposer la condition de positivité suivante, relative à la forme symplectique $\omega$ sur $F$. Précisément, nous demandons que pour tout $A \in \pi_2(F)$ nous ayons :

$$\omega(A) > 0 \ , c_1^{TF}(A) \geq 3 - n_P \quad \Longrightarrow c_1^{TF}(A) \geq 0. \tag{4.2.2}$$

Cette condition est sensiblement plus faible que celle de demander que $P$ soit semi-positive. Cela impose toutefois que la fibre est semi-positive quant à elle. Remarquons que cette condition est équivalente à demander que le nombre minimal de Chern $N_F$ associé à $(F,\omega)$ (pour une famille de structures presque complexes compatibles avec $\omega$) est tel que $N_F \geq n_F + (n_B - 2)$, ce qui est précisement la condition (0.0.1) de l'introduction. Enfin remarquons encore que cette condition est au moins satisfaite par toutes les fibrations Hamiltoniennes dont l'espace total est de dimension 6 et moins.

**Théorème 4.2.2.** *Supposons que $(F,\omega)$ satisfait la condition (4.2.2). Soit $\sigma \in H_2(P;\mathbb{Z})$ et posons $\sigma_B := \pi_*(\sigma)$. Supposons que $\omega_B(\sigma_B) \neq 0$ et que $\mathcal{J}_{irr}(\sigma_B)$ est non-vide. Alors :*

i) *Pour tout $J^H_P \in \mathcal{P}_{reg}(\omega,\omega_B,\tau)$ se projetant sur $\mathcal{J}_{irr}(\sigma_B)$, les applications d'évaluation $ev^B_{l,J_B}$ et $ev^P_{l,J^H_P}$ sont des pseudo-cycles. De plus, changer de structure régulière via des chemins réguliers induit un bordisme entre les applications d'évaluation aux extrémités, si on suppose au préalable que la structure presque complexe dans $B$ varie dans une composante connexe de $\mathcal{J}_{irr}(\sigma_B)$.*

ii) *Fixons une structure régulière* $J_B$ *et soit* $(u_B, \mathrm{x}) \in \mathcal{M}^*_{0,l}(B, J_B, \sigma_B)$. *Alors pour tout élément de* $\mathcal{JH}_{reg}(u_B, J_B)$, *le couple* $(\mathcal{F}_\pi^{-1}(u_B, \mathrm{x}), ev_{(u_B,\mathrm{x})})$ *est un pseudo-cycle qui reste dans la même classe de bordisme en changeant de paire régularisante via des chemins réguliers.*

**Preuve:** Nous allons seulement prouver la première affirmation, la preuve de la seconde étant presque mot pour mot la même . Fixons $(J_B, J, H) \in \mathcal{P}_{reg}(\omega, \omega_B, \tau)$. Donc $J_B \in \mathcal{J}_{B,reg}(\omega_B)$ et par le lemme précédent nous avons que $ev^B_{l,J_B}$ est un pseudo-cycle. Maintenant, par le lemme 3.1.5, il existe seulement une nombre fini de données de strate $\mathcal{S}$ représentant des limites géométriques de courbes dans $\mathcal{M}^{**}_{0,l}(P, \sigma, J^H_P)$. Donc, par compacité de Gromov :

$$\Omega_{ev^P_{l,J^H_P}} \subset \bigcup_{\mathcal{S}} ev^P_{l,J^H_P}(\mathcal{M}^{**}_{\mathcal{S}}(P, J^H_P)),$$

où l'union est considérée sur toutes les données de strate réduites, de sorte que si $\vec{\sigma} = \sum_{i\in I} \sigma_i$ désigne ici l'information homologique associée à la réduction $\mathcal{S}$, il existe des entiers $m_i > 0$ pour tout $i \in I_0$ tels que :

$$\sigma = \sum_{i\in I_+} \sigma_i + \sum_{i\in I_0} m_i\sigma_i.$$

La condition (4.2.2) implique directement que $c_1^v(\sigma_i) = c_1^{TF}(\sigma_i) > 0$ pour tout $i \in I_0$ et nous pouvons conclure que

$$\dim \mathcal{M}^{**}_{\mathcal{S}}(P, J^H_P) \leq \dim \mathcal{M}^{**}(P, \sigma, J^H_P) - 2$$

pour toutes les réductions de strates apparaissant dans la compactification de $\mathcal{M}^{**}_{0,l}(P, \sigma, J^H_P)$. D'où $ev^P_{l,J^H_P}$ est un pseudo-cycle. L'indépendance en les paramètres réguliers est démontrée comme suit. Supposons que $\mathcal{J}_{irr}(\sigma_B)$ est connexe par arc. Soit $J^H_{P,t}$ un chemin de structures presque complexes qui se projette sur un chemin de $\mathcal{J}_{B,reg}(J_{B,0}, J_{B,1}) \cap \mathcal{J}_{irr}(\sigma_B)$, et tel que

$$J^H_{P,0}, J^H_{P,1} \in \mathcal{P}_{reg}(\omega, \omega_B, \tau), \quad \{J^H_{P,t}\} \in \mathcal{P}_{reg}(J^H_{P,0}, J^H_{P,1}).$$

Alors, toute application stable apparaissant comme limite de Gromov d'une suite d'éléments de

$$\mathcal{W}^{**}_{0,l}(P, \sigma, \{J^H_{P,t}\}),$$

est telle que ses racines non-triviales sont irréductibles, et a possiblement des composantes de fibre réductibles. Il en découle, en argumentant exactement comme auparavant, que toutes les strates de $\overline{\mathcal{W}}_{0,l}^{**}(P,\sigma,\{J_{P,t}^H\})$ ont codimension au moins 2 dans $P$, par rapport à la strate supérieure des courbes simples. Encore une fois, cela résulte de la condition (4.2.2). Ainsi, l'application d'évaluation

$$ev_{l,\{J_{P,t}^H\}}^P : \mathcal{W}_{0,l}^{**}(P,\sigma,\{J_{P,t}^H\}) \longrightarrow P^l$$

est un $2n_P + 2c_1(\sigma) + 2l - 6 + 1$ pseudo-cycle induisant un bordisme entre $ev_{l,J_{P,0}^H}^P$ et $ev_{l,J_{P,1}^H}^P$.

$\square$

## 4.3. La formule produit

Cette section est consacrée à démontrer la formule produit. Nous n'avons toutefois pas encore établi la définition précise des invariants de Gromov-Witten, ce que nous faisons dès à présent.

### 4.3.1. Invariants de Gromov-Witten

Soit $P$ une variété symplectique de dimension $2n_P$, et soit $J_P$ une structure presque complexe compatible avec la forme symplectique. Comme déjà mentionné auparavant, les invariants de Gromov-Witten comptent le nombre algébrique de courbes simples $J_P$-holomorphes avec points marqués, intersectant transversalement un "cycle" de $P^l$ fixé au préalable et représentant un classe d'homologie sphérique $\sigma$. Plus précisément, considérons l'espace de modules $\overline{\mathcal{M}}_{0,l}(P,\sigma;J_P)$ dont la strate supérieure $\mathcal{M}_{0,l}^*(P,\sigma;J_P)$ est, rappelons-le, une variété orientée de dimension :

$$\dim(\mathcal{M}_{0,l}^*(P,\sigma;J_P)) = 2n_P + 2c_1^{TP}(\sigma) + 2l - 6.$$

Cet espace de modules est muni d'une application d'évaluation en les points marqués :

$$ev_{l,J_P}^P : \mathcal{M}_{0,l}^*(P,\sigma;J_P) \longrightarrow P^l, \;\; (u,x_1,\ldots,x_l) \mapsto (u(x_1),\ldots,u(x_l))$$

qui, sous certaines conditions, est un pseudo-cycle pour un choix générique de structures presque complexes compatibles. Nous supposerons par la suite que $J_P$

est régulière.

Désignons par $H_*(P)$ l'homologie de $P$ modulo torsion et soient des éléments $c_1, \ldots, c_l \in H_*(P)$. Ces classes, comme l'indique la section sur les pseudo-cycles, sont génériquement représentables par des pseudo-cycles $(V_1, f_1), \ldots, (V_l, f_l)$, de dimensions respectives $\dim V_i := \deg(c_i)$ $i = 1, ..., l$, placés en position générale et tels que $ev^P_{l,J_P}$ est fortement transverse au pseudo-cycle produit $(V_1, f_1) \times ... \times (V_l, f_l)$ que nous dénoterons par $V_1 \times \cdots \times V_l$ pour simplifier. Ainsi, lorsque la condition suivante est remplie :

$$2n_P(1-l) + 2c_1^{TP}(\sigma) + 2l - 6 + \sum_{i=0}^{l} \deg(c_i) = 0, \tag{4.3.1}$$

les pseudo-cycles en jeu sont de dimensions complémentaires et la préimage par $ev^P_{l,J_P}$ du cycle produit $V_1 \times \cdots \times V_l$ est un nombre fini de points isolés que nous pouvons compter avec signes grâce aux orientations. Etant donné ce qui a été dit on pose :

**Définition 4.3.1.** (***Invariant de Gromov-Witten***)

$$GW^P_{0,l}(c_1, \ldots, c_l; \sigma, J_P) = \begin{cases} ev^P_{l,J_P} \cdot (f_1 \times ... \times f_l) & si\ c_1, ..., c_l\ satisfont\ 4.3.1 \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

On remarque ici que ce nombre ne dépend que de la classe de bordisme des pseudo-cycles considérés et par conséquent, ne dépend pas de la structure presque complexe que nous choisissons générique ; autrement dit, c'est un invariant de la structure presque complexe.

Si on fixe $\sigma$, $J_P$ et le nombre $l$ de points marqués, ces invariants définissent un homomorphisme à valeur dans $\mathbb{Z}$ (sous certaines conditions à priori) :

$$GW^P_{0,l}(\sigma, J_P) : (H_*(P))^{\otimes l} \longrightarrow \mathbb{Z}.$$

Il est possible de montrer le résultat suivant ([**29**]) :

**Proposition 4.3.1.** *$GW^P_{0,l}(\sigma, J_P)$ est un homomorphisme multilinéaire qui satisfait les relations de commutativité suivantes :*

$$GW^P_{0,l}(..., c_i, ..., c_j, ...; \sigma, J_P) = (-1)^{\deg c_i + \deg c_j} GW^P_{0,l}(..., c_j, ..., c_i, ...; \sigma, J_P).$$

**Preuve:** La linéarité découle du fait qu'un pseudo-cycle représentant la classe $a \oplus b$, disons, est bordant à la réunion disjointe de pseudo-cycles (génériques) représentant $a$ et $b$ respectivement. La commutativité résulte quant à elle des relations du même type existant pour le produit "cross" en homologie.

□

Enfin, voici une autre propriété des invariants de Gromov-Witten, qui se révélera utile pour la suite et qui est communément connue sous le nom d'**axiome des diviseurs**, introduit par Kontsevich et Manin dans leur axiomatique des invariants de Gromov-Witten [16]. Soit $M \hookrightarrow P$ une sous-variété symplectique de codimension 2, et désignons par $[M]$ sa classe fondamentale vue dans $H_{2n_P-2}(P)$. Alors, nous avons l'identité suivante :

$$GW^P_{0,l+1}(c_1, \ldots, c_l, [M]; \sigma, J_P) = GW^P_{0,l}(c_1, \ldots, c_l; \sigma, J_P)(\sigma.[M]).$$

où $\sigma.[M]$ désigne le produit d'intersection entre les deux classes d'homologie.

### 4.3.2. La formule

En voici l'énoncé précis :

**Théorème 4.3.2.** (***Formule produit***). *Soit $(F, \omega) \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} (B, \omega_B)$ une fibration Hamiltonienne qui satisfait la condition (4.2.2). Soit $\sigma \in H_2(P; \mathbb{Z})$ et supposons que la classe $\sigma_B := \pi_*(\sigma) \neq 0$ n'admet que des décompositions effectives irréductibles et que $\mathcal{J}_{irr}(\sigma_B) \neq \emptyset$. Soient les classes $c_i^B$, $c_i^F$ et $c_i^P$, $i = 1, \ldots, l$, telles que (4.1.1) et (4.1.2) sont satisfaites. Alors pour un choix générique de structures presque complexes fibrées nous avons :*

$$GW^P_{0,l}(c_1^P, \ldots, c_l^P; \sigma) = \sum_j GW^{P|_C}_{0,l}(\iota_F^{P|_C}(c_1^F), \ldots, \iota_F^{P|_C}(c_l^F); \sigma_j) GW^B_{0,l}(c_1^B, \ldots, c_l^B; \sigma_B), \tag{4.3.2}$$

*où $C$ désigne l'image d'un élément compté dans $GW^B_{0,l}(c_1^B, \ldots, c_l^B; \sigma_B)$, $\iota_F^{P|_C}$ désigne l'inclusion de $F$ dans $P|_C$, et $\sigma_j$ sont toutes les 2-classes d'homologie de $P|_C$ qui sont envoyées sur $\sigma$ via $\iota^P_{P|_C}$ l'inclusion de $P|_C$ dans $P$.*

On remarque tout de suite que par compacité de Gromov, la somme ci-dessus doit être finie. Aussi, un calcul simple nous montre que les conditions pour lesquelles, dans l'équation (4.3.2), le membre de gauche ainsi que la partie faisant intervenir $B$ dans le membre de droite ne s'annulent pas forcément, nous donnent la condition sous laquelle la partie faisant intervenir $P|_C$ ne s'annule pas forcément.

Notons enfin que par l'axiome des diviseurs, appliqué aux fibres $F$ dans $P|_C$, nous pouvons réécrire (4.3.2) de la façon suivante :

$$GW^P_{0,l}(c^P_1, ..., c^P_l; \sigma) = \sum_j GW^{P|_C}_{0,m}(\iota^{P|_C}_F(c^F_1), ..., \iota^{P|_C}_F(c^F_m); \sigma_j) GW^B_{0,l}(c^B_1, ..., c^B_l; \sigma_B).$$

En prenant en compte le lemme 1.6.2, nous pouvons simplifier cette formule en considérant la classe d'équivalence $[\sigma]_{\sigma_B}$ à la place de $\sigma$ : posons $\sigma_C$ la classe d'équivalence de sections de $P|_C$ donnée par $(\iota^P_{P|_C})^{-1}([\sigma]_{\sigma_B})$ (cf lemme 1.6.2), alors nous obtenons :

**Corollaire 4.3.3.** *Pour $[\sigma]_{\sigma_B}$ et $\sigma_C$ comme ci-dessus, la formule produit prend la forme suivante :*

$$GW^P_{0,l}(c^P_1, ..., c^P_l, [\sigma]_{\sigma_B}) = GW^{P|_C}_{0,l}(\iota^{P|_C}_F(c^F_1), ..., \iota^{P|_C}_F(c^F_l), \sigma_C) GW^B_{0,l}(c^B_1, ..., c^B_l, \sigma_B). \tag{4.3.3}$$

**Preuve:** (Théorème 4.3.2) Par hypothèse sur $J_B$, et par le lemme 4.2.1 nous savons que $ev^B_l$ est un pseudo-cycle. De surcroît, nous pouvons génériquement choisir les cycles $(V^B_i, f^B_i)$ de sorte que $ev^B_l \pitchfork f^B$. Par définition,

$$n^B \equiv GW^B_{0,l}(c^B_1, ..., c^B_l, \sigma_B) := ev^B_l . f^B.$$

Ce nombre ne dépend pas de $J_B$ (pour des chemins génériques dans $\mathcal{J}_{irr}(\sigma_B)$) ainsi que des classes de bordisme des cycles $(V^B_i, f^B_i)$. Par ailleurs, ce nombre est zéro à moins que les dimensions de $ev^B_l$ et $f^B$ soient complémentaires.

Nous supposerons dès à présent que cette dernière condition est satisfaite. Alors $(ev^B_l)^{-1}(f^B)$ est donné par une ensemble fini de courbes simples $J_B$-holomorphes avec $l$ points marqués. Dénotons par $\{(u_{B,\alpha}, \mathbf{x}_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ l'ensemble de toutes ces courbes, et par $C_\alpha$ les images correspondantes dans $B$. Par le théorème 4.2.2, les applications d'évaluation $ev_{(u_{B,\alpha}, \mathbf{x}_\alpha)}$ sont des pseudo-cycles pour tout élément de $\mathcal{JH}_{reg}(\{u_{B,\alpha}\}_{\alpha\in A},\sigma,J_B)$. Rappelons que chaque $\alpha$ :

$$ev_{(u_{B,\alpha},\mathrm{x}_\alpha)} : \mathcal{F}_\pi^{-1}(u_{B,\alpha},\mathrm{x}_\alpha) \longrightarrow \prod_{i=1}^{l} F_{u_{B,\alpha}(x_{i,\alpha})}.$$

Soit $\iota^P_{F,\alpha}$ le plongement de $F^l$ dans $\prod_{i=1}^l F_{u_{B,\alpha}(x_{i,\alpha})}$. Alors $\iota^P_{F,\alpha}\circ f^F$ est un pseudo-cycle dans $\prod_{i=1}^l F_{u_{B,\alpha}(x_{i,\alpha})}$. Etant donné que $A$ est fini, nous pouvons génériquement choisir les cycles $(V_i^F, f_i^F)$ de sorte que pour tout $\alpha\in A$ nous avons

$$ev_{(u_{B,\alpha},\mathrm{x}_\alpha)} \pitchfork \iota^P_{F,\alpha}\circ f^F.$$

Ceci, plus le fait que $ev_l^B$ est transverse à $f^B$ implique que $ev_l^P$ est transverse au cycle $f^P$. Par définition, nous avons que

$$n^P \equiv GW^P_{0,l}(c_1^P,\dots,c_l^P,\sigma) := ev_l^P . f^P,$$

et posons :

$$n(u_{B,\alpha},\mathrm{x}_\alpha)) := ev_{(u_{B,\alpha},\mathrm{x}_\alpha)}.(\iota^P_{F,\alpha}\circ f^F).$$

Désignons par $P_{C_\alpha}$ la restriction de $P$ à $C_\alpha$ et soit $\iota^P_{P_{C_\alpha}}$ l'inclusion $P_{C_\alpha}$ dans $P$. Désignons par $\{\sigma'_{\alpha,j}\}_j$ l'ensemble des classes de section de $P_{C_\alpha}$, i.e les éléments de $H_2(P_C;\mathbb{Z})$ se projetant sur $[C]$, et tels que $(\iota^P_{P_{C_\alpha}})_*\sigma'_j = \sigma$. En dénotant par $J_{P_{C_\alpha}}$ la restriction de $J_P^H$ au fibré $P_{C_\alpha}$, le nombre $n(u_{B,\alpha},\mathrm{x}_\alpha)$ désigne alors le nombre algébrique de courbes $J_{P_{C_\alpha}}$-holomorphes qui intersectent les cycles $\iota^P_{F,\alpha}\circ f_i^F$ dans les fibres $F_{u_{B,\alpha}(x_{i,\alpha})}$ aux points $x_{i,\alpha}\in S^2$, et qui représentent les classes $\sigma'_{\alpha,j}$. En, effet, remarquons que $\iota^P_{P_{C_\alpha}}$ induit naturellement une identification :

$$\iota^P_{P_{C,\alpha}} : \bigsqcup_j \overline{\mathcal{M}}^*(P_{C_\alpha}, J_{P_{C_\alpha}},\sigma'_{\alpha,j}) \longrightarrow \overline{\mathcal{F}_\pi^{-1}(u_{B,\alpha},\mathrm{x}_\alpha)},$$

qui restreinte à chaque strate est un difféomorphisme préservant les orientations. Aussi, remarquons que par simplicité des $u_{B,\alpha}$, l'ensemble des $l$ points marqués est naturellement identifié à l'espace de modules $\mathcal{M}^*_{0,l}(C_\alpha,[C_\alpha])$ qui est en l'occurrence une variété de dimension $2l$. Nous obtenons le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\pi^{-1}(\mathrm{x}) = \bigsqcup_j \mathcal{M}^*(P_C,\sigma'_j) \arrow[r] \arrow[d, "ev_{\mathrm{x}}^{P_C}"] & \bigsqcup_j \mathcal{M}^*_{0,l}(P_C,\sigma'_j) \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "ev_l^{P_C}"] & \mathcal{M}^*_{0,l}(C,[C]) \arrow[d, "ev_l^C"] \\
F^l \arrow[r, "(\iota_F^{P_C})^l"] & P_C^l \arrow[r, "\pi^l"] & C^l
\end{tikzcd} \tag{4.3.4}$$

où les structures complexes sont omises afin d'alléger les notations. Les flèches verticales, quant à elles, sont les évaluations en les points marqués, qu'ils soient préalablement fixés, comme à l'extrême gauche, ou non. Par définition nous avons que :

$$ev_{\mathbf{x}_\alpha}^{P_{C_\alpha}} = ev_{(u_{B,\alpha},\mathbf{x}_\alpha)} \circ \iota_{P_{C_\alpha}}^P. \tag{4.3.5}$$

C'est donc un pseudo-cycle pour des paramètres de fibres génériques. Nous concluons en utilisant le diagramme (4.3.4), et comme $\mathcal{M}_{0,l}^*(C_\alpha, [C_\alpha])$ ne représente que les points marqués, nous concluons que $ev_l^{P_C}$ est génériquement un pseudo-cycle.

Encore une fois, on remarque que les conditions pour lesquelles $n(u_{B,\alpha}, \mathbf{x}_\alpha)$ et $n^B$ sont non nécessairement zéro, nous donnent la condition sous laquelle $n^P$ est possiblement non nul. Nous allons montrer que pour n'importe quel $\alpha \in A$ nous avons :

$$n^P = n(u_{B,\alpha}, \mathbf{x}_\alpha) n^B. \tag{4.3.6}$$

Désignons par $\epsilon_P$, $\epsilon_B$, et $\epsilon_{P_{C_\alpha},\mathbf{x}_\alpha}$ les fonctions signes associées aux courbes comptées respectivement dans $n^P$, $n^B$ et $n(u_{B,\alpha}, \mathbf{x}_\alpha)$. Afin d'avoir la relation souhaitée, nous devons nous assurer que les signes des courbes comptées sont compatibles avec l'application $\pi^l$. Autrement dit, nous devons montrer que

$$\epsilon_P = \epsilon_B \times \epsilon_{P_{C_\alpha},\mathbf{x}_\alpha}.$$

Notons pour commencer que l'orientation de $f^P$ est induite par celles de $f^B$ et $f_{\mathbf{x}}^F$. Pour tout élément de $\mathcal{JH}_{reg}(\{u_{B,\alpha}\}_{\alpha\in A}, \sigma, J_B)$, le théorème 2.3.1 nous donne la suite exacte :

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow T_u\left(\mathcal{F}_\pi^{-1}(u_{B,\alpha}, \mathbf{x}_\alpha)\right) \longrightarrow \ & T_{(\iota_{P_{C_\alpha}}^P(u),\mathbf{x}_\alpha)}\mathcal{M}_{0,l}^{**}(P, \sigma; J_P^H) \longrightarrow \\ \longrightarrow \ & T_{(u_{B,\alpha},\mathbf{x}_\alpha)}\mathcal{M}_{0,l}^{*}(B, \sigma_B; J_B) \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Chaque membre de cette suite est naturellement orienté, ce qui nous permet de conclure que :

$$\det T_{(\iota_{P_{C_\alpha}}^P(u),\mathbf{x}_\alpha)}\mathcal{M}_{0,l}^{**}(P, \sigma; J_P^H) \cong \det T_u\left(\mathcal{F}_\pi^{-1}(u_{B,\alpha}, \mathbf{x}_\alpha)\right) \otimes \det T_{(u_{B,\alpha},\mathbf{x}_\alpha)}\mathcal{M}_{0,l}^{*}(B, \sigma_B; J_B).$$

Par conséquent, la relation $\epsilon_P = \epsilon_B \times \epsilon_{P_{C_\alpha},\mathbf{x}_\alpha}$ est vérifiée pour tout $\alpha \in A$. Nous obtenons donc :

$$\begin{aligned} n^P = \sum_{\{u_{B,\alpha}\in n^B\}} \sum_{\{u\in n(u_{B,\alpha},\mathbf{x}_\alpha)\}} \epsilon_P(\iota^P_{P_{C_\alpha}}(u)) &= \sum_{\alpha\in A} \sum_{\{u\in n(u_{B,\alpha},\mathbf{x}_\alpha)\}} \epsilon_{P_{C_\alpha},\mathbf{x}_\alpha}(u)\epsilon_B(u_{B,\alpha},\mathbf{x}_\alpha) \\ &= \sum_{\alpha\in A} \epsilon_B(u_{B,\alpha},\mathbf{x}_\alpha) \sum_{\{u\in n(u_{B,\alpha},\mathbf{x}_\alpha)\}} \epsilon_{P_{C_\alpha},\mathbf{x}_\alpha}(u) \\ &= n(u_{B,\alpha_0},\mathbf{x}_{\alpha_0})n^B \end{aligned}$$

où la dernière égalité est due au fait que

$$n(u_{B,\alpha},\mathbf{x}_\alpha) = \sum_j GW^{P_{C_\alpha}}_{0,l}(\iota_F^{P_{C_\alpha}}(c_1^F),\dots,\iota_F^{P_{C_\alpha}}(c_l^F),\sigma_j), \qquad (4.3.7)$$

ainsi qu'au lemme 1.2.2 qui nous assure que $n(u_{B,\alpha},\mathbf{x}_\alpha))$ est indépendant de $\alpha \in A$ (ici, $\alpha_0$ désigne juste un élément quelconque de $A$). Enfin, l'égalité (4.3.7) se montre de la même façon que (4.3.6), où l'on utilise cette fois le diagramme (4.3.4) à la place de (4.2.1). Les cycles produits à intersecter respectivement avec les applications d'évaluation $ev_l^{P_{C_\alpha}}$, $ev_l^{C_\alpha}$ et $ev_{\mathbf{x}_\alpha}^{P_{C_\alpha}}$, sont donnés par :

$$(\mathcal{C}_{P_{C_\alpha}}, f^{P_{C_\alpha}}) := (\mathcal{C}^F, (\iota_F^{P_{C_\alpha}})^l \circ f^F), \quad (\mathcal{C}_{C_\alpha}, f^{C_\alpha}) := (pt \times \dots \times pt, f^{C_\alpha})$$

ainsi que

$$(\mathcal{C}_{F_{\mathbf{x}_\alpha}}, f^F_{\mathbf{x}_\alpha}) := (\mathcal{C}_F, \iota^{P_{C_\alpha}}_{F,\mathbf{x}_\alpha}(f^F)).$$

En désignant par $n^{P_{C_\alpha}}$, $n^{C_\alpha}$ et $n_{\mathbf{x}_\alpha}^{P_{C_\alpha}}$ les nombres d'intersections respectifs, et par $\epsilon_{P_{C_\alpha}}$, $\epsilon_{C_\alpha}$ et $\epsilon_{P_{C_\alpha},\mathbf{x}_\alpha}$ les fonctions signes correspondantes, nous pouvons montrer, en procédant comme plus haut, que

$$\epsilon_{P_{C_\alpha}} = \epsilon_{C_\alpha} \times \epsilon_{P_{C_\alpha},\mathbf{x}_\alpha} = \epsilon_{P_{C_\alpha},\mathbf{x}_\alpha},$$

car $\epsilon_{C_\alpha}$ vaut toujours 1, et que par là même nous obtenons que

$$n^{P_{C_\alpha}} = n_{\mathbf{x}_\alpha}^{P_{C_\alpha}} n^{C_\alpha}.$$

Or, par définition, $n^{P_{C_\alpha}}$ et $n^{C_\alpha}$ nous donnent respectivement :

$$\sum_j GW^{P_{C_\alpha}}_{0,l}(\iota_F^{P_{C_\alpha}}(c_1^F),\dots,\iota_F^{P_{C_\alpha}}(c_l^F),\sigma'_{\alpha,j}) \text{ et } GW^{C_\alpha}_{0,l}(pt,\dots,pt,[C_\alpha]),$$

où ce dernier nombre est constamment égal à 1, et nous obtenons ainsi (4.3.7).

Le fait que cette formule ne dépende pas du choix de triplet régularisant résulte du théorème 4.2.2 qui nous assure l'existence d'un bordisme entre les applications d'évaluation correspondantes pour deux choix de triplets réguliers.

□

# Chapitre 5

## THÉORIE DU RECOLLEMENT ET STRUCTURE DE FIBRATION D'ESPACES DE MODULES

Le but de ce chapitre est de donner à l'application $\mathcal{F}_\pi$ une structure de fibration localement triviale lorsque cela a du sens. En particulier nous aimerions avoir une telle structure au-dessus de la strate supérieure de $\overline{\mathcal{M}}(B, \sigma_B, J_B)$ lorsque $\sigma_B \neq 0$.

Pour ce faire nous allons montrer que le recollement des applications holomorphes stables dans l'espace total est réalisé de façon compatible avec le recollement de la courbe correspondante dans la base. La compatibilité est ici par rapport à la projection $\pi$ encore une fois.

Le recollement, dont l'idée de base est conceptuellement assez simple, peut être vu comme un processus inverse à la convergence de Gromov, et apparait naturellement en théorie de Floer ainsi que dans la théorie des invariants de Gromov-Witten. Sa construction, que l'on peut notamment trouver dans [**3**], [**6**], [**29**], [**23**], [**22**], [**24**], [**38**], [**42**] [**43**], [**44**], parmi tant d'autres, est ardue et peu naturelle.

Un point essentiel dans ces constructions, consiste s'il y a lieu, à trouver une slice pour l'action des reparamétrisations. Pour ce faire nous suivrons l'approche adoptée dans [**3**], où les auteurs introduisent les espaces de modules des applications balancées afin de réduire l'action du groupe des reparamétrisations du domaine qui peut être non compact, à celle d'un groupe compact ($S^1$). Nous généralisons cette construction au cas fibré où la base diffère du point et nous en déduisons que les espaces de modules compactifiés dans $P$ et dans $B$ possèdent des structures d'orbi-variétés lisses, dont les cartes sont données par les applications de recollement, et qui sont compatibles avec la projection $\mathcal{F}_\pi$.

Nous terminons en retrouvant la formule produit par intégration sur les fibres de $\mathcal{F}_\pi$.

### 5.0.3. Hypothèses et notations

Soit $J_P$ une structure complexe fibrée et soient des 2-classes d'homologie $\sigma \in H_2(P, \mathbb{Z})$ et $\sigma_B \in H_2(B, \mathbb{Z})$ telles que $\sigma_B = \pi_* \sigma$, à moins qu'il n'en soit précisé autrement. Nous ferons la supposition suivante sur la structure complexe fibrée $J_P$, à moins que mentionné autrement :

**Hypothèses 5.0.4.** *Soit $\mathcal{S}_P$ une donnée de strate stable dans $P$ pour la classe $\sigma$. On demande alors que pour tout $u \in \mathcal{M}_{\mathcal{S}_P}(P, J_P)$ :*

- *les opérateurs $D_u^v$ et $D^B_{\mathcal{F}_\pi(u)}$ sont surjectifs ;*
- *les applications d'évaluation en les arêtes $ev^B$ et $ev_{\mathcal{F}_\pi(u)}$ sont transverses aux diagonales correspondantes.*

Ces deux conditions impliquent en l'occurrence que pour tout $u \in \mathcal{M}_{\mathcal{S}_P}(P, J_P)$, l'opérateur $D_u$ est surjectif et que l'application d'évaluation en les arêtes, $ev^P$, est transverse à la diagonale correspondante (cf chapitre sur les théorèmes de structure). De plus, si on dénote par $\mathcal{S}_B$ l'image de $\mathcal{S}_P$ via $\mathcal{F}_\pi$, la condition (5.0.4) nous assure que $\mathcal{M}_{\mathcal{S}_P}(P, J_P)$, $\mathcal{M}_{\mathcal{S}_B}(B, J_B)$, et $\mathcal{F}_\pi^{-1}(u_B)$ pour $u_B \in \mathcal{M}_{\mathcal{S}_B}(B, J_B)$, sont des variétés naturellement orientées, et ceci pour tout $u_B$.

Nous avons :

**Proposition 5.0.5.** *Supposons que la condition* (5.0.4) *est remplie et posons $\mathcal{S}_B = \mathcal{F}_\pi(\mathcal{S}_P)$ avec $\vec{\sigma_B} := \pi_* \vec{\sigma} \neq 0$. Alors, les espaces quotients $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{S}_P}(P, J_P)$, $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{S}_B}(B, J_B)$, et $\widetilde{\mathcal{F}_\pi^{-1}(u_B)}$ héritent alors d'une structure d'orbifold lisse qui est compatible avec la projection $\mathcal{F}_\pi$.*

**Preuve:** La preuve est complétement standard, mais précisons que la structure d'orbifold est réalisable car nous ne considérons que des strates stables et que par là même les groupes d'automorphismes des applications stables sont finis. La condition de compatibilité est quant à elle assurée par le fait que

$$\pi_* \circ D_u = D^B_{\mathcal{F}_\pi(u)} \circ \pi_*.$$

□

**Remarque 5.0.1.** – *Dès à présent, nous omettrons souvent les structures presque complexes dans les notations qui suivent, car il est entendu que nous faisons un choix ici. Nous supposerons aussi que les hypothèses* (5.0.4) *sont réalisées pour cette structure presque complexe fibrée choisie.*

– *Dans ce qui va suivre les notations $U_{\mathcal{S}_P}$ et $U_{\mathcal{S}_B}$ réfèreront à des ouverts propres respectifs de $\mathcal{M}_{\mathcal{S}_P}(P)$ et $\mathcal{M}_{\mathcal{S}_B}(B)$ tels que*

$$\mathcal{F}_\pi(U_{\mathcal{S}_P}) = U_{\mathcal{S}_B}.$$

Nous entamons en définissant la notion de recollement pour les domaines nodaux.

## 5.1. Recollement des courbes nodales

Le but de cette section est de faire un rappel du processus de recollement dans le cas des courbes nodales. Les faits mentionnés ne seront en général pas démontrés en toute rigueur. Pour les preuves nous référons le lecteur à [10].

Nous allons commencer par décrire la désingularisation $\Sigma_\rho$ d'une courbe nodale rationnelle, $\mathbf{j} := (\Sigma := \cup_{i\in I}\Sigma_i, \mathbf{y}, \mathbf{x})$, pour des paramètres de recollement $\rho \in (\mathbb{C}^*)^{|E|}$ de rayons suffisamment petits (ici $|E|$ dénote le nombre de singularités). Ceci est effectué comme suit. Pour tout $i, j \in I$ tels que $iEj$, considérons les points $y_{ij}$ et $y_{ji}$ de la normalisation de $\mathbf{j}$, représentant le point nodal $\Sigma_i \cap \Sigma_j =: y_{i,j}$. Soient $D_{ij}$ et $D_{ji}$ des disques de rayons bien plus petit que 1 autour de $y_{ij}$ et $y_{ji}$, ne contenant aucun point marqué, que l'on identifie conformément avec le disque unité $D(1) \subset \mathbb{C}$ muni de la métrique plate standard, via des difféomorphismes

$$\varphi_{ij} : D_{ij} \longrightarrow D(1) \subset \mathbb{C}.$$

Alors le voisinage de $y_{i,j} := \Sigma_i \cap \Sigma_j$ correspondant peut être vu comme le sous-ensemble de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ defini par

$$D(1) \times D(1) \cap \{z_{ij} z_{ji} = 0\}.$$

La désingularisation de $y_{i,j}$ consiste à déformer ce dernier sous-ensemble en :

$$D(1) \times D(1) \cap \{z_{ij} z_{ji} = \rho_{i,j}\} \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C},$$

tout en préservant le reste de la courbe. Précisément, soit

$$\rho := \{\rho_{i,j}\}_{iEj} \in (\mathbb{C}^*)^{|E|},$$

de sorte que $r_{i,j} := |\rho_{i,j}| << 1$ pour tout $i, j$, et considérons l'anneau (fermé) $\mathcal{A}_{ij} = \varphi_{ij}^{-1}(D(1) - D(r_{i,j}))$. On pose alors

$$\Sigma_\rho := \bigcup_{\{i,j \in I | iEj\}} \Sigma_i - \varphi_{ij}^{-1}(D(r_{i,j})) \sqcup_{gl_{i,j,\rho}} \Sigma_j - \varphi_{ji}^{-1}(D(r_{i,j})),$$

où $gl_{i,j,\rho}$ est l'application de recollement suivante

$$gl_{i,j,\rho} : \mathcal{A}_{ij} \longrightarrow \mathcal{A}_{ji}, \quad z_{ij} \mapsto z_{ji} = \varphi_{ji}^{-1}\left(\frac{\rho_{i,j}}{\varphi_{ij}(z_{ij})}\right).$$

Étant donné que $gl_{i,j,\rho}$ sont des difféomorphismes qui préservent l'orientation, la surface obtenue est aussi orientée. De surcroît, la structure conforme de cette désingularisation ne dépend que du paramètre $\rho$. Notons qu'une métrique sur $\Sigma_\rho$ est donnée par les métriques sur $\Sigma_i$ en dehors des anneaux où le processus de recollement est effectué, et est donnée par la métrique induite de par celle de $\mathbb{C}^2$ sur ces anneaux. En d'autres termes nous interpolons à l'aide d'une fonction de découpage (cut-off) les métriques existant sur les deux composantes en jeu.

**Remarque 5.1.1.** *En supposant que nous n'ayons que deux composantes $\Sigma_1$ et $\Sigma_2$, le recollement consiste grossièrement à remplacer le disque de rayon $r$ autour du point nodal $y_{12}$ par le disque $\Sigma_2 - D_{y_{21}}(r)$ que nous avons préalablement reparamétrisé en multipliant par le paramètre de gluing $\rho$, de sorte à obtenir un disque de rayon $r$.*

Notons que les anneaux $\varphi_{ij}(\mathcal{A}_{ij})$ sont conformément équivalents aux cylindres de longueur $|\log r_{i,j}|$ en utilisant le changement de variable :

$$\phi_i : D^*(1) \longrightarrow (-\infty, 0] \times S^1, \quad z := re^{i\theta} \mapsto (\log r, \theta),$$

où $D^*(1)$ désigne ici le disque unité épointé à l'origine. Dans ces coordonnées, l'application de recollement prend la forme suivante :

$$\begin{aligned} \widetilde{gl}_{i,j,\rho} : [\log r_{i,j}, 0] \times S^1 &\longrightarrow [\log r_{i,j}, 0] \times S^1 \\ (t - 0.5 \log r_{i,j}, \theta) &\mapsto (-t + 0.5 \log r_{i,j}, \theta_0 - \theta). \end{aligned}$$

où $\theta_0$ désigne l'argument de de $\rho$.

Observons à présent que les paramètres de recollement $\rho_{i,j}$ définissent naturellement des éléments des espaces vectoriels

$$\mathbb{C}_{y_{i,j}} := T_{y_{ij}}\Sigma_i \otimes T_{y_{ji}}\Sigma_j \cong \mathbb{C}.$$

Posons

$$\mathbb{C}_{\mathrm{j}} := \oplus_{iEj}\mathbb{C}_{y_{i,j}},$$

nous obtenons alors une application :

$$gl_{\mathrm{j}} : B_\epsilon \subset \mathbb{C}_{\mathrm{j}} \longrightarrow \widetilde{\mathcal{M}}_{0,l}, \quad \rho \mapsto \Sigma_\rho \tag{5.1.1}$$

qui coïncide avec l'identité lorsque $\rho = 0$. Notons que Aut(j) agit sur $\mathbb{C}_{\mathrm{j}}$ via :

$$\varphi. \oplus_{iEj} (z_i \otimes z_j) = \oplus_{iEj}(\varphi_{*_{y_{ij}}}(z_i) \otimes \varphi_{*_{y_{ji}}}(z_j)).$$

**Lemme 5.1.1.** *$gl_{\mathrm{j}}$ est injective si et seulement si* j *est stable. De surcroît, lorsque la courbe est stable, $gl_{\mathrm{j}}$ est équivariante par rapport à l'action du groupe d'automorphisme $Aut(\mathrm{j})$.*

Considérons à présent une donnée de strate stable $\mathcal{S}$ et soit $\mathcal{M}_{\mathcal{S}}$ l'espace de modules correspondant des classes d'isomorphisme de courbes ayant $\mathcal{S}$ comme représentation. On peut alors construire un orbi-fibré

$$p_{\mathcal{S}} : \mathcal{L}_{\mathcal{S}} \longrightarrow \mathcal{M}_{\mathcal{S}},$$

de fibre au-dessus de $\mathrm{j} \in \mathcal{M}_{\mathcal{S}}$ identifiée à $\mathbb{C}_{\mathrm{j}}$. Ce dernier est induit par le fibré $\widetilde{\mathcal{L}}_{\mathcal{S}}$ sur

$$\bigsqcup_{\mathrm{j} \in \mathcal{M}_{\mathcal{S}}} \mathcal{N}(\mathrm{j}) \equiv \mathcal{M}_{0,l_1+n_1} \times \ldots \times \mathcal{M}_{0,l_s+n_s},$$

de fibre $\mathbb{C}_{\mathrm{j}}$ au-dessus de $\mathcal{N}(\mathrm{j})$ et dont la projection sera dénotée $p_{\mathcal{S}}$ aussi.

Voici brièvement comment $\mathcal{L}_\mathcal{S}$ est obtenu. Soit un système uniformisant autour d'un point j, $(V, \mathrm{Aut}(\mathrm{j}), \pi_\mathcal{S})$, nous avons le fibré localement trivial

$$\mathbb{C}_\mathrm{j} \hookrightarrow \widetilde{\mathcal{L}}_\mathcal{S}\Big|_V \xrightarrow{p_S} V,$$

sur lequel Aut(j) agit naturellement via pull-back, et dont la projection $p_\mathcal{S}$ est Aut(j) équivariante. Les triplets $(\widetilde{\mathcal{L}}_\mathcal{S}\Big|_V, \mathrm{Aut}(\mathrm{j}), (\pi_\mathcal{S}^*)^{-1})$ nous donnent alors les systèmes uniformisants pour $\mathcal{L}_\mathcal{S}$.

À présent, étant donné un sous-ensemble ouvert propre $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}_\mathcal{S}$, il existe un nombre positif $\epsilon$ dépendant de $\mathcal{U}$, tel que le recollement défini plus haut, s'étend en un difféomorphisme local sur un ouvert $\mathcal{U}'$ de $\overline{\mathcal{M}}_{0,l}$ :

$$gl_\mathcal{S} : \mathcal{L}_{\mathcal{S},\epsilon}|_\mathcal{U} \longrightarrow \overline{\mathcal{M}}_{0,l}, \tag{5.1.2}$$

où $\mathcal{L}_{\mathcal{S},\epsilon}$ signifie que l'on se restreint uniquement à un $\epsilon$ voisinage de la section nulle.

**Remarque 5.1.2.** *En réalité l'application de gluing ci-haut est définie au préalable sur des voisinages de la section nulle des* $\widetilde{\mathcal{L}}_\mathcal{S}\Big|_V$. *Puis, par équivariance de l'application de recollement vis-à-vis de Aut*(j)*, nous pouvons finalement conclure que* $gl_\mathcal{S}$ *est bien définie sur* $\mathcal{L}_{\mathcal{S},\epsilon}$.

Notons que le processus de recollement décrit ci-dessus fonctionne même lorsque $\mathcal{S}$ est instable, mais dans ce cas nous considérons les courbes comme étant paramétrées. Désignons par $\widetilde{\mathcal{M}}_\mathcal{S}$ l'ensemble des surfaces nodales paramétrées ayant $\mathcal{S}$ comme représentation en terme d'arbre. Dans ce cas, le groupe des automorphismes pour une surface nodale donnée, agit sur cette surface et ainsi sur $\widetilde{\mathcal{M}}_\mathcal{S}$, et l'espace des orbites associées est encore dénoté par $\mathcal{M}_\mathcal{S}$. Autrement dit, nous avons une application :

$$\mathcal{F}_{par} : \widetilde{\mathcal{M}}_\mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{M}_\mathcal{S},$$

de fibre

$$\mathcal{F}_{par}^{-1}(\mathrm{j}) = \mathrm{Aut}(\mathrm{j}) \times \mathrm{Aut}_\mathcal{S}.$$

Nous oublierons désormais de mentionner la partie $\mathrm{Aut}(\mathcal{S})$ pour simplifier les notations. Nous avons naturellement au-dessus de $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{S}}$ un fibré

$$\widetilde{p}_{\mathcal{S}} : \widetilde{\mathcal{L}}_{\mathcal{S}} \longrightarrow \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{S}}$$

de fibre au-dessus de $\mathrm{j} \in \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{S}}$ donnée par $\mathbb{C}_{\mathrm{j}}$ comme précédemment. Soit $(\mathrm{j}, \rho)$ un élément de ce fibré, alors le groupe $\mathrm{Aut}(\mathrm{j})$ agit dessus via :

$$g.(\mathrm{j}, \rho) \mapsto (g^*\mathrm{j}, g.\rho),$$

où l'action sur le paramètre de recollement est celle décrite auparavant. Le quotient par cette action nous donne un fibré :

$$p_{\mathcal{S}} : \mathcal{L}_{\mathcal{S}} \longrightarrow \mathcal{M}_{\mathcal{S}}.$$

Pour un ouvert propre $V \subset \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{S}}$, que nous supposerons invariant par rapport au groupe des automorphismes (donc induisant un voisinage sur $\mathcal{M}_{\mathcal{S}}$), nous avons une application de recollement :

$$\widetilde{gl}_{\mathcal{S}} : \widetilde{\mathcal{L}}^*_{\mathcal{S},\epsilon}\Big|_V \longrightarrow \widetilde{\mathcal{M}}_{0,l}.$$

Après quotient par les reparamétrisations nous obtenons une application :

$$gl_{\mathcal{S}} : \mathcal{L}^*_{\mathcal{S},\epsilon}\Big|_{\mathcal{F}_{par}(V)} \longrightarrow \widetilde{\mathcal{M}}_{0,l}.$$

**Théorème.** *$gl_{\mathcal{S}}$ est difféomorphisme local si et seulement si $\mathcal{S}$ est stable.*

**Exemple 5.1.1.** *Soit l'espace $\mathcal{M}_{0,4} = S^2 - \{0, 1, \infty\}$. Chaque point de $\mathcal{M}_{0,4}$ est donné par $[S^2, 0, 1, \infty, x] \equiv x$ qui est donc naturellement paramétrisé par le cross ratio de $(0, 1, \infty, x)$. Cet espace se compactifie en faisant tendre $x$ vers soit 0, soit 1, soit $\infty$. En chaque point de compactification la donnée de strate (stable) obtenue $\mathcal{S}$, est composée de deux sommets avec une arête entre les deux sommets, et deux tiges pour chacun des sommets. Supposons que le point en question soit 0 et considérons $\mathcal{M}_{\mathcal{S}}$. Cet espace consiste en un unique point*

$$\mathrm{j}_0 = [\Sigma = S_1^2 \cup S_2^2, y_{12}, y_{21}, x_1^1, x_2^1, x_1^2, x_2^2],$$

*où l'on peut supposer, sans perte de généralité, que : $y_{12} = 0$, $y_{21} = \infty$, $x_1^1, x_2^1 \in S_1^2$ avec $x_1^1 = 0$ et $x_2^1 = 1$, et enfin similairement, $x_1^2, x_2^2 \in S_2^2$ avec $x_1^2 = 0$ et $x_2^2 = 1$.*

*Dans ce cas $\mathcal{L}_{\mathcal{S}} = \mathbb{C}_{\mathbf{j}_0} = \mathbb{C}$ et chaque $\rho \in \mathcal{L}_{\mathcal{S}}$ détermine un unique élément $\mathbf{j}_\rho \in \mathcal{M}_{0,4}$ via l'application de gluing, qui est explicitement donné par $[S^2, 0, 1, \infty, \rho]$. En particulier, $\mathcal{L}_{\mathcal{S}}$ définit un voisinage tubulaire de 0 dans $\overline{\mathcal{M}}_{0,4}$.*

Si $\mathcal{S}' < \mathcal{S}$, i.e $\mathcal{S}$ est obtenu en contractant certaines arêtes dans la représentation de $\mathcal{S}'$, il existe un sous-fibré $\mathcal{L}_{\mathcal{S}',\mathcal{S}}$ de $\mathcal{L}_{\mathcal{S}'}$ ayant pour fibres $\mathbb{C}^{|E|-|E'|}$, où $|E'|$ désigne le nombre d'arêtes de $\mathcal{S}'$, et des applications de recollement (définie sur des sous-ensembles ouverts propres)

$$gl_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} : \mathcal{L}_{\mathcal{S}',\mathcal{S},\epsilon} \longrightarrow \overline{\mathcal{M}}_{\mathcal{S}}.$$

## 5.2. Pré-recollement d'applications

Le but de cette section est de construire à partir d'une application stable holomorphe, une application lisse qui est approximativement holomorphe. Nous désirons aussi réaliser cette approximation de façon compatible avec la projection associée à la fibration Hamiltonienne.

Soit $(u, \mathbf{j}) := (\Sigma, \mathbf{u}, \mathbf{y}, \mathbf{x})$ une application $J_P$-holomorphe stable dans $P$, représentant la donnée de strate $\mathcal{S}_P = (T, D, \vec{\sigma})$, et notons $\mathcal{S}_B$ sa projection par $\mathcal{F}_\pi$. Dans ce qui suit, nous considèrerons ces strates fixées. Le pré-recollement $u_\rho$ de $\mathbf{u}$ est une application de la désingularisation $\Sigma_\rho$ vers $P$ définie comme suit :

$$u_\rho(z) := \begin{cases} u_i(z) & \text{if } z \in \Sigma_i - D_{ij}(2r_{i,j}^{1/4}), \\ p_{i,j} := u_i(y_{i,j}) = u_j(y_{i,j}) & \text{if } z \in D_{ij}(r_{i,j}^{1/4}) \backslash D_{ij}(r_{i,j}^{3/4}) \sim D_{ji}(r_{i,j}^{1/4}) \backslash D_{ji}(r_{i,j}^{3/4}), \\ u_j(z) & \text{if } z \in \Sigma_j - D_{ji}(2r_{i,j}^{1/4}). \end{cases}$$

Afin de définir cette application sur le reste de $\Sigma_\rho$, considérons une fonction lisse $\beta : \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1]$ telle :

$$\beta(s) = \begin{cases} 0 & \text{if } s \leq 1, \\ 1 & \text{if } s \geq 2, \end{cases}$$

et telle que $|\beta'(s)| \leq 2$. On pose alors :

$$u_\rho(z) := \exp_{p_{i,j}} \left( \beta \left( \frac{|z|}{r_{i,j}^{1/4}} \right) \exp_{p_{i,j}}^{-1} u_i(z) + \beta \left( \frac{r_{i,j}^{3/4}}{|z|} \right) \exp_{p_{i,j}}^{-1} u_j(\frac{\rho}{z}) \right), \qquad (5.2.1)$$

où $z$ appartient au sous-ensemble

$$D_{ij}(2r_{i,j}^{1/4}) - D_{ij}(r_{i,j}^{1/4}) \cup D_{ij}(r_{i,j}^{3/4}) - D_{ij}(\frac{1}{2}r_{i,j}^{3/4}).$$

Pour que cette formule ait un sens, nous devons supposer que $\rho$ est assez petit de sorte que les disques $D_i(4r_{i,j}^{1/4})$ sont envoyés sous $u_i$ dans un voisinage normal de $p_{i,j}$.

**Remarque 5.2.1.** *On remarque que $u_\rho$ est lisse et dépend continûment de $\rho$.*

Nous démontrons à présent que le pré-recollement de l'application $\mathbf{u}$ dans $P$ se projette sur le pré-recollement de l'application $\pi(\mathbf{u}) =: \mathbf{u}_B$.

**Lemme 5.2.1.** *Nous avons que*

$$\pi \circ u_\rho = (\pi \circ u)_\rho \equiv u_{B,\rho}.$$

**Preuve:** Pour simplifier les notations posons :

$$\xi_i(z) := \exp_{p_{i,j}}^{-1} u_i(z), \;\; \xi_j(z) := \exp_{p_{i,j}}^{-1} u_j(\rho/z), \;\; \beta^+ := \beta(|z|/r_{i,j}^{1/4}), \;\; \beta^- := \beta(r_{i,j}^{3/4}/|z|).$$

En utilisant les égalités suivantes qui résultent en l'occurrence de notre choix de connexion :

$$\pi(\exp_p X) = \exp_{\pi(p)} \pi_{*_p} X, \quad \pi_{*_p} \exp_p^{-1}(q) = \exp_{\pi(p)}^{-1}(\pi(q)),$$

nous concluons que $\pi(u_\rho)$ est donnée par :

$$\pi(u_\rho) = \begin{cases} \pi(u_i) & \text{si } z \in \Sigma_i - D_{ij}(2r_{i,j}^{1/4}), \\ \pi(p_{i,j}) = \pi(u_i(y_{i,j})) = \pi(u_j(y_{i,j})) & \text{si } z \in D_{ij}(r_{i,j}^{1/4}) - D_{ij}(r_{i,j}^{3/4}) \\ \exp_{\pi(p_{i,j})}\left(\beta^+ \pi_{*_{p_{i,j}}} \xi_i(z) + \beta^- \pi_{*_{p_{i,j}}} \xi_j(z)\right) & \text{sinon.} \end{cases} \tag{5.2.2}$$

Cette dernière expression peut être réécrite de la façon suivante :

$$\exp_{\pi(p_{i,j})}\left(\beta^+ \exp_{\pi(p_{i,j})}^{-1}(\pi(u_i(z))) + \beta^- \exp_{\pi(p_{i,j})}^{-1}(\pi(u_j(\rho/z)))\right),$$

de sorte que $\pi(u_\rho)$ coïncide, comme désiré, avec $u_{B,\rho}$ le pré-recollement associé à l'application $\pi(\mathbf{u})$.

□

**Remarque 5.2.2.** *Il est à noter que l'on obtient pas le pré-recollement de $\mathcal{F}_\pi(u)$ ici mais bien celui de $\pi(u)$. En particulier, si $u$ ne contient que des composantes principales, le pré-recollement de $\mathcal{F}_\pi(u)$ coïncide bien avec la projection du pré-recollement de $u$.*

*Observons aussi que si toutes les composantes de $u$ résident dans la même fibre $F_{\pi(\mathbf{u})}$ de $P$, alors le pré-recollement de $\mathbf{u}$ doit rester dans $F_{\pi(\mathbf{u})}$ étant donné que $\xi_i, \xi_j$ sont alors des éléments de $T_{p_{i,j}}P^v$. Cependant, si nous supposons en particulier que $u$ ne contient qu'une seule composante racine $u_0$, et que toutes les autres se trouvent dans des branches au-dessus de $u_0$, alors le pré-recollement correspondant ne reste pas nécessairement dans $P|_{\pi(u_0)}$. Néanmoins nous verrons par la suite, que son recollement nous renverras vers l'image de $\pi(u_0)$.*

En utilisant la symétrie existant dans la définition du pré-recollement, nous obtenons les estimés suivant :

**Lemme 5.2.2.** *Soit $p > 2$ et des ouverts $U_{S_P}$ et $U_{S_B}$ tels que dans la remarque 5.0.1. Il existe des constantes positives $c^v(U_{S_P}, p)$ et $c^B(U_{S_B}, p)$ indépendantes de $\rho$, telles que pour tout élément $u \in U_{S_P}$, nous avons :*

$$\|du^v_\rho\|_{L^\infty} \leq c^v, \quad \|(\overline{\partial}_{J_P} u_\rho)^v\|_{L^p} \leq c^v |\rho|^{1/2p},$$

*et*

$$\|du_{B,\rho}\|_{L^\infty} \leq c^B, \quad \|\overline{\partial}_{J_B} u_{B,\rho}\|_{L^p} \leq c^B |\rho|^{1/2p},$$

*où $u_B := \pi(u)$. En particulier, il existe une constante $c^P$ dépendant de $c^v$ et $c^B$ telle que*

$$\|du_\rho\|_{L^\infty} \leq c^P, \quad \|\overline{\partial}_{J_P} u_\rho\|_{L^p} \leq c^P |\rho|^{1/2p}.$$

**Preuve:** Les estimations pour les parties verticales et horizontales procèdent de la même manière. Une preuve en est fournie dans [**29**], [**3**], [**43**]. Pour les deux dernières estimations, il suffit de remarquer que

$$\|du_\rho\|_{L^p} \leq \|du_{B,\rho}\|_{L^p} + \|du^v_\rho\|_{L^p},$$

par définition de la métrique $g_{J_P}$.

$\square$

Les estimations impliquant l'opérateur de Cauchy-Riemann montrent que pour de petites valeurs de $|\rho|$, la nouvelle courbe $u_\rho$ est proche d'être holomorphe en norme $L^p$.

Soit $N_u^P$ la partie non linéaire de l'expansion de Taylor en $u$ associée à l'opérateur $\overline{\partial}_{J_P}$. Définissons $N_u^B$ de la même façon. En d'autres termes, pour $\xi \in W^{1,p}(u^*TP)$ :

$$N_u^P(\xi) = \overline{\partial}_{J_P} \exp_u \xi - \overline{\partial}_{J_P} u - D_u \xi,$$

et pour $\xi \in W^{1,p}(u_B^*TB)$ :

$$N_{u_B}^B(\xi) = \overline{\partial}_{J_B} \exp_{u_B} \xi - \overline{\partial}_{J_B} u_B - D_{u_B}^B \xi.$$

Notons que

$$\pi_* \circ N_u^P = N_{\pi(u)}^B \circ \pi_*.$$

Alors, par le premier estimé de (5.2.2), on peut dériver l'estimation quadratique standard suivante, dont une preuve est donnée dans [29] (Chapitre 3) où encore dans [5].

**Lemme 5.2.3.** *Soit $p > 2$ et $U_{S_P}$, $U_{S_B}$ comme précédemment. Il existe des constantes $c_1^P(U_{S_P}, p)$ et $c_1^B(U_{S_B}, p)$ indépendantes de $\rho$, telles que pour tout élément $u \in U_{S_P}$, nous avons :*

$$\|N_{u_\rho}^P(\xi_1) - N_{u_\rho}^P(\xi_2)\|_{L^p} \leq c_1^P(\|\xi_1\|_{W^{1,p}} + \|\xi_2\|_{W^{1,p}})\|\xi_1 - \xi_2\|_{W^{1,p}},$$

*et*

$$\|N_{\pi(u)_\rho}^B(\xi_1) - N_{\pi(u)_\rho}^B(\xi_2)\|_{L^p} \leq c_1^B(\|\xi_1\|_{W^{1,p}} + \|\xi_2\|_{W^{1,p}})\|\xi_1 - \xi_2\|_{W^{1,p}}.$$

**Preuve:** Pour la preuve, on vérifie point par point que ces estimations tiennent pour des constantes $c_1^B$ et $c_1^P$ qui dépendent respectivement uniquement de $\|du\|_\infty$ et $\|d\pi(u)\|_\infty$ grâce au lemme précédent. Le reste suit par compacité des ensembles $U_{S_P}$ et $U_{S_B}$. Les estimations point par point sont standards et une preuve en est fournie dans [29] (Chapitre 3) où encore dans [5].

□

## 5.3. Inverses à droite

Nous entamons cette section en décrivant un inverse à droite pour l'opérateur $D_u$ qui est induit par la donnée d'inverses à droite pour les opérateurs $D_u^v$ et $D_{\pi(u)}^B$. Rappelons que $D_u$ peut s'écrire sous forme matricielle de la façon suivante :

$$\begin{pmatrix} (D_{\pi(u)}^B)^h & 0 \\ L_u & D_u^v, \end{pmatrix} \tag{5.3.1}$$

où $L_u$ dénote l'opérateur linéaire :

$$L_u : \mathcal{X}_{P,u}^h \longrightarrow \mathcal{E}_{P,u}^v, \quad \xi \mapsto -\frac{1}{2}J(u)(\nabla_\xi J)(\partial_{J_P} u)^v + R^{0,1}(du^h, \xi).$$

**Remarque 5.3.1.** *Il s'ensuit directement que $L_u$ est borné et plus précisément,*

$$\|L_u\| \leq C'',$$

*où $C''$ est une constante qui dépend de $\|J\|_{C^1}$, $\|du\|_{L^\infty}$ et de la norme de Hofer $\|R\|_H$ de la courbure symplectique.*

Par hypothèse, les opérateurs $D_{\pi(u)}^B$ et $D_u^v$ sont surjectifs. Considérons alors leurs (uniques) inverses à droite respectifs $Q_{\pi(u)}^B$ et $Q_u^v$ satisfaisants :

$$\mathrm{Im}(Q_{\pi(u)}^B) = (\ker D_{\pi(u)}^B)^{\perp_{L^2}} \quad \mathrm{Im}(Q_u^v) = (\ker D_u^v)^{\perp_{L^2}}, \tag{5.3.2}$$

où les compléments $L^2$-orthogonaux sont considérés par rapport aux normes $g_{J_B}$ et $g_J$. Posons :

$$Q_u := \begin{pmatrix} (Q_{\pi(u)}^B)^h & 0 \\ L'_u & Q_u^v \end{pmatrix} \tag{5.3.3}$$

alors,

$$D_u \circ Q_u := D_u \circ \begin{pmatrix} (Q_{\pi(u)}^B)^h & 0 \\ L'_u & Q_u^v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Id & 0 \\ L_u \circ (Q_{\pi(u)}^B)^h + D_u^v \circ L'_u & Id \end{pmatrix}, \tag{5.3.4}$$

impliquant par là même que $Q_u$ est un inverse à droite dès que l'opérateur $L' : (\mathcal{E}_P)_u^h \longrightarrow (\mathcal{X}_P)_u^v$ satisfait

$$L_u \circ (Q_{\pi(u)}^B)^h + D_u^v \circ L'_u = 0. \tag{5.3.5}$$

Un choix naturel pour $L'$ est donné par :

$$L' := -Q^v \circ L \circ (Q^B)^h. \tag{5.3.6}$$

Le lemme suivant est évident :

**Lemme 5.3.1.** *Soit $Q_u$ un inverse à droite pour $D_u$ et supposons que $Q^B_{\pi(u)}$ et $Q^v_u$ satisfont la condition* (5.3.2). *Alors $L'_u$ est univoquement déterminé par l'équation* (5.3.5) *et la condition que $Q_u$ a pour image le complémentaire $L^2$-orthogonal de* $\ker D_u$. *Dans ce cas, $L'$ est donné explicitement par :*

$$-Q^v_u \circ L \circ (Q^B_{\pi(u)})^h.$$

*En particulier, si*

$$\|Q^B_{\pi(u)}\| < C^h \quad et \quad \|Q^v_u\| < C^v,$$

*pour des constantes positives $C^v$ et $C^h$ dépendant de $\|du\|_{L^\infty}$, alors*

$$\|L'\| < C^h C'' C^v,$$

*où $C''$ est la constante de la remarque* 5.3.1.

**Preuve:** Par hypothèse, l'image de $L'$ est contenue dans le complémentaire $L^2$-orthogonal du noyau de $D^v$. Comme $\ker D^v$ est fini-dimensionnel, et étant donné que $D^v$ est surjectif, nous avons que pour $\eta \in (\mathcal{E}_P)^v_u$ donné, il existe un unique élément $\xi \in (\ker D^v)^\perp$ tel que $D^v\xi = \eta$. On peut dès lors définir $L'(\eta)$ comme étant l'unique élément de $(\ker D^v)^\perp$ tel que l'équation (5.3.5) est satisfaite, ce qui nous donne en l'occurrence que $L' = -Q^v \circ L \circ (Q^B)^h$. La deuxième affirmation est immédiate.

□

**Remarque 5.3.2.** *Observons que le choix de complémentaire $L^2$-orthogonal ci-dessus est effectué pour des raisons de commodité, mais non essentielles. Les arguments de la preuve ci-dessus passent en fait tout à fait pour d'autres choix, à partir du moment que l'on demande que l'image de $Q$ soit donnée par les images de $Q^B$ et $Q^v$.*

Dans ce qui suit, nous présentons la construction d'une famille d'inverses à droite $Q_{u_\rho}$ de $D_{u_\rho}$, qui est uniformément bornée par rapport aux paramètres de recollement, et qui est construite à partir de familles uniformément bornées d'inverses à droite pour $D^B$ et $D^v$. Plus précisément, nous construisons un opérateur $R_{u_\rho}$ qui est un quasi-inverse de $D_{u_\rho}$ pour de petites valeurs de $|\rho|$, et tel que :

i) sa projection via $d\pi$ nous donne un quasi-inverse $R^B_{\pi(u)_\rho}$ pour $D^B_{\pi(u)_\rho}$,

ii) lorsqu'on le restreint aux $0,1$-formes à valeurs verticales, nous obtenons un quasi-inverse $R^v_{u_\rho}$ pour l'opérateur vertical $D^v_{u_\rho}$,

iii) les opérateurs $R_{u_\rho}$, $R^B_{\pi(u)_\rho}$ et $R^v_{u_\rho}$ sont uniformément bornés pour de petites valeurs de paramètres de recollement.

Nous explicitons ces trois points dans la proposition suivante qui forme le résultat principal de cette section.

**Proposition 5.3.2.** *Soit $p > 2$. Soient $U_{S_P}$ et $U_{S_B}$ comme précédemment. Pour tout $(\mathbf{j}, u_B) \in U_{S_B}$ il existe un opérateur*

$$R^B_{u_{B,\rho}} : \mathcal{E}^p_{B,u_{B,\rho}} \longrightarrow \mathcal{X}^{1,p}_{B,u_{B,\rho}},$$

*qui dépend de façon lisse en les paires $((\mathbf{j}, u_B), \rho)$ et tel qu'il existe des constantes $C^B$ et $\widetilde{C}^B$ indépendantes de $\rho$ par rapport auxquelles :*

$$\|D^B_{u_{B,\rho}} R^B_{u_{B,\rho}}\eta - \eta\|_{L^p} \leq \frac{C^B}{|\log|\rho||^{1-1/p}}\|\eta\|_{L^p}, \quad \|R^B_{u_{B,\rho}}\eta\|_{W^{1,p}} \leq \frac{\widetilde{C}^B}{2}\|\eta\|_{L^p}.$$

*De plus, pour tout $u \in U_{S_P}$ il existe un opérateur*

$$\begin{array}{rcl} R_{u_\rho} : \mathcal{E}^{p,h}_{P,u_\rho} \oplus \mathcal{E}^{p,v}_{P,u_\rho} & \longrightarrow & \mathcal{X}^{1,p,h}_{P,u_\rho} \oplus \mathcal{X}^{1,p,v}_{P,u_\rho} \\ (\eta^h, \eta^v) & \mapsto & ((R^B_{\pi(u)_\rho}\pi_*\eta^h)^h + L^R_{u_\rho}\eta^h, R^v_{u_\rho}\eta^v), \end{array} \tag{5.3.7}$$

*qui dépend de façon lisse en les paires $((\mathbf{j}, u), \rho)$ et tel que*

- *il existe des constantes $C^v$ et $\widetilde{C}^v$ indépendantes de $\rho$ par rapport auxquelles :*

$$\|D^v_{u_\rho} R^v_{u_\rho}\eta - \eta\|_{L^p} \leq \frac{C^v}{|\log|\rho||^{1-1/p}}\|\eta\|_{L^p}, \quad \|R^v_{u_\rho}\eta\|_{W^{1,p}} \leq \frac{\widetilde{C}^v}{2}\|\eta\|_{L^p}.$$

- *il existe des constantes $C^P$ et $\widetilde{C}^P$ indépendantes de $\rho$ par rapport auxquelles :*

$$\|D_{u_\rho} R_{u_\rho}\eta - \eta\|_{L^p} \leq \frac{C^P}{|\log|\rho||^{1-1/p}}\|\eta\|_{L^p}, \quad \|R_{u_\rho}\eta\|_{W^{1,p}} \leq \frac{\widetilde{C}^P}{2}\|\eta\|_{L^p}.$$

Ce fait est une adaptation à la présente situation d'un résultat analogue dans le cas non fibré dont la preuve est donnée en l'occurrence dans [29], [43] et [3].

Dans la démonstration, nous allons considérer les courbes suivantes $u_{i,\rho_{i,j}}$ sur $\Sigma_i$, où $iEj$ :

$$u_{i,\rho} := \begin{cases} u_\rho(z) & \text{si } z \in \Sigma_i - \bigsqcup_{\{j|iEj\}} D_{ij}(r_{i,j}^{1/4}), \\ u_i(y_{i,j}) = p_{i,j} & \text{sinon.} \end{cases} \tag{5.3.8}$$

Ces applications interpolent $\mathbf{u}$ et son pré-recollement. Par le lemme 10.4.3 de [**29**], nous avons que $u_{i,\rho}$ converge vers $u_i$ en norme $W^{1,p}$, quand $|\rho|$ tend vers 0. Ainsi, nous déduisons que les opérateurs $D^B_{\pi(u_{i,\rho})}$, $D^v_{u_{i,\rho}}$ ainsi que $D^P_{u_{i,\rho}}$, doivent nécessairement converger vers $D^B_{\pi(u_i)}$, $D^v_{u_i}$ et $D^P_{u_i}$ dans la norme opérateur lorsque $|\rho| \to 0$.

Par conséquent, par la condition (5.0.4) ces premiers opérateurs sont surjectifs, impliquant par la même que ces derniers le sont aussi. Donc, l'opérateur résultant de la perturbation $W^{1,p}$, $\mathbf{w}_\rho := \{u_{i,\rho}\}_{\{i\in I\}}$ de $\mathbf{u}$ :

$$D_{\mathbf{w}_\rho} : \left\{ \{\xi_i\}_{i\in I} \in \prod_{i\in I} \mathcal{X}^{1,p}_{P,u_{i,\rho}} \mid \xi_i(y_{ij}) = \xi_j(y_{ji}) \right\} \longrightarrow \prod_{i\in I} \mathcal{E}^p_{P,u_{i,\rho}},$$

est surjectif, ainsi que les opérateurs $D^v_{\mathbf{w}_\rho}$ et $D^B_{\pi(\mathbf{w}_\rho)}$ qui sont définis de façon similaire. Nous concluons donc que tous ces opérateurs possèdent des inverses à droite. Désignons par $Q^v_{\mathbf{w}_\rho}$ et $Q^B_{\pi(\mathbf{w}_\rho)}$ les uniques inverses à droite, ayant pour image le complément $L^2$-orthogonal des noyaux correspondant, et par $Q_{\mathbf{w}_\rho}$ l'inverse à droite qui en résulte (cf 5.3.4), où $L'$ est donné par $-Q^v \circ L \circ (Q^B)^h$.

**Lemme 5.3.3.** *Fixons $p > 2$. Pour tout $u \in U_{S_P}$ se projetant sur $u_B \in U_{S_B}$, il existe des constantes positives $c^B$ et $c^v$ indépendantes de $\rho$, telles que pour tout $\eta \in \prod_{i\in I} \mathcal{E}^p_{P,u_{i,\rho}}$ nous avons :*

$$\|Q^B_{\pi(\mathbf{w}_\rho)}\pi_*\eta\|_{W^{1,p}} \leq c^B\|\eta\|_{L^p} \quad \|Q^v_{\mathbf{w}_\rho}\eta\|_{W^{1,p}} \leq c^v\|\eta\|_{L^p}.$$

*En particulier, par le lemme 5.3.1 nous avons qu'il existe une constant positive $c^P$ indépendante de $\rho$, telle que :*

$$\|Q_{\mathbf{w}_\rho}\eta\|_{W^{1,p}} \leq c^P\|\eta\|_{L^p}.$$

Ce lemme découle directement du lemme 10.6.1 de [**29**]. Nous passons maintenant à la preuve du résultat principal de cette section.

**Preuve:** (Proposition 5.3.2)

**Construction des opérateurs :** pour $iEj$, soit $\mathcal{C}_{i,j}$ le cercle dans $\Sigma_\rho$ donné par :

$$\mathcal{C}_{i,j} := \{(z_{ij}, z_{ji}) \in \mathbb{C}^2 | (z_{ij}, z_{ji}) \in \Sigma_\rho, |z_{ij}| = |z_{ji}| = r_{i,j}^{1/2}\}.$$

Étant donné un ordre partiel sur $I$, on pose

$$\mathcal{C} := \bigsqcup_{\{i,j|iEj,i<j\}} \mathcal{C}_{i,j},$$

et on considère par la suite l'application $\pi_\rho : \Sigma_\rho \backslash \mathcal{C} \longrightarrow \Sigma$, qui est définie comme étant l'identité en dehors de l'anneau $\mathcal{A}_{i,j} := \mathcal{A}_{ij} \sim \mathcal{A}_{ji}$ et qui sur chaque ensemble $\mathcal{A}_{i,j}$ est donné par :

$$\pi_\rho(z_{ij}, z_{ji}) := \begin{cases} z_{ij} & \text{si } |z_{ij}| > |z_{ji}|, \\ z_{ji} & \text{si } |z_{ji}| > |z_{ij}|. \end{cases}$$

Nous remarquons que $\pi_\rho$ est un biholomorphisme sur son image

$$\operatorname{Im}(\pi_\rho) = \Sigma \backslash \left( \bigsqcup_{\{i,j|iEj,i<j\}} D_{ij}(r_{i,j}^{1/2}) \cup D_{ji}(r_{i,j}^{1/2}) \right).$$

De surcroît nous avons :

$$u_\rho := \begin{cases} w_\rho \circ \pi_\rho & \text{sur } \Sigma_\rho \backslash \mathcal{C}, \\ u_i(y_{ij}) = u_j(y_{ji}) = p_{i,j} & \text{sur } \mathcal{C}. \end{cases}$$

Subséquemment, on définit l'application

$$\begin{aligned} \Lambda : L^p(\Lambda^{0,1}_{J_p}(\Sigma_\rho, u_\rho^*(TP)) &\longrightarrow L^p(\Lambda^{0,1}_{J_p}(\Sigma, w_\rho^*(TP)) \\ \eta &\mapsto \begin{cases} (\pi_\rho^*)^{-1}\eta & \text{sur } \operatorname{Im}(\pi_\rho), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

On définit à présent une application servant à interpoler les champs de vecteurs $\xi_i$ et $\xi_j$ :

$$\begin{aligned} \Gamma : W^{1,p}(w_\rho^* TP) &\longrightarrow W^{1,p}(u_\rho^* TP) \\ \xi := \{\xi_i\}_{i \in I} &\mapsto \xi_\rho := \begin{cases} \xi_i(z_{ij}) + \beta_{r_{i,j}}(z_{ij})(\xi_j(z_{ji}) - \xi_{i,j}) & \text{si } |z_{ji}| \leq |z_{ij}| \leq |r_{i,j}|^{1/4}, \\ \xi_j(z_{ji}) + \beta_{r_{i,j}}(z_{ji})(\xi_i(z_{ij}) - \xi_{i,j}) & \text{si } |z_{ij}| \leq |z_{ji}| \leq |r_{i,j}|^{1/4}, \\ \xi(z) & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

où $\xi_{i,j} := \xi(y_{i,j})$ et

$$\beta_{r_{i,j}}(z) := \beta\left(\frac{\log|z|}{\log r_{i,j}^{1/4}}\right),$$

$\beta$ est une fonction saut comme précédemment. Finalement posons :

$$R_{u_\rho} := \Gamma \circ Q_{w_\rho} \circ \Lambda. \tag{5.3.9}$$

Étant donné que les applications $\Gamma$ et $\Lambda$ préservent le scindement sur $TP$ induit par la connexion Hamiltonienne, celles-ci sont données sous forme matricielle par :

$$\Lambda := \begin{pmatrix} \Lambda^h & 0 \\ 0 & \Lambda^v \end{pmatrix} \qquad \Gamma := \begin{pmatrix} \Gamma^h & 0 \\ 0 & \Gamma^v \end{pmatrix}, \tag{5.3.10}$$

et nous obtenons à partir de la représentation matricielle de $Q_{w_\rho}$ :

$$R_{u_\rho} = \begin{pmatrix} \Gamma^h (Q^B_{\pi(w_\rho)})^h \Lambda^h & 0 \\ -\Gamma^v Q^v_{w_\rho} L_{w_\rho} (Q^B_{\pi(w)_\rho})^h \Lambda^h & \Gamma^v Q^v_{w_\rho} \Lambda^v \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} R^h_{u_\rho} & 0 \\ L^R_{u_\rho} & R^v_{u_\rho} \end{pmatrix}. \tag{5.3.11}$$

En posant

$$R^B := d\pi \circ R^h,$$

nous obtenons finalement l'expression désirée pour $R_{u_\rho}$.

**Les estimations** : À ce point de la démonstration, nous devrions insister sur le fait que $R^B$ et $R^v$ correspondent exactement aux opérateurs denotés par $T_{u_R}$ dans [**29**] (Chapitre 10), et par $R_{\tilde{t}}$ dans [**43**]. En appliquant donc leurs arguments (lemme de la section 3.5 dans [**43**], ou encore proposition 10.5.1 dans [**29**]), nous obtenons les estimations voulues pour $R^B$ et $R^v$. Nous en esquisserons la preuve dans le cas de $R^B$ dans quelques instants. Mais avant de ce faire, nous en dérivons les estimés souhaités pour $R_{u_\rho}$.

Posons $\xi_\rho = R_{u_\rho}\eta$ et supposons, sans perte de généralité, que nous n'avons que deux composantes indicées par $i = 1, 2$. Posons aussi $r_{1,2} = r$. En dehors de l'anneau

$$D_{12}(r^{1/4}) - D_{12}(r^{3/4}) \sim D_{21}(r^{1/4}) - D_{21}(r^{3/4}),$$

nous avons que $\xi_\rho = \xi = Q_{w_\rho}\eta$ et $u_\rho = w_\rho$ ce qui implique que $D_{u_\rho}\xi_\rho = \eta$. Par conséquent, l'estimation souhaitée est trivialement réalisée sur cette partie de la courbe, et en vue de la symétrie dans la définition, il ne nous reste plus qu'à estimer ce qui se passe dans l'anneau $D_{12}(r^{1/4}) - D_{12}(r^{1/2})$.

Dans cette région nous avons que $u_\rho$ et $w_\rho$ sont constantes de valeur $p_{1,2}$. Il s'ensuit que les opérateurs $D_{u_\rho}$, $D_{u_{1,\rho}}$ et $D_{u_{2,\rho}}$ coïncident avec l'opérateur de Cauchy-Riemann standard et peut donc s'exprimer ainsi :

$$\begin{pmatrix} (\overline{\partial}_{J_B(\pi(p_{1,2}))})^h & 0 \\ 0 & \overline{\partial}_{J_{\pi(p_{1,2})}} \end{pmatrix}. \tag{5.3.12}$$

Nous remarquons aussi que dans cette région, $L^R_{u_\rho}$ doit s'annuler étant donné que $L_{w_\rho}$ s'annule lui-même point par point. Nous concluons donc que les estimations désirées suivent des estimations pour $R^B$ et $R^v$, en particulier le premier estimé est obtenu en choisissant $C^P \geq \max(C^B, C^v)$, et le second en choisissant $\widetilde{C}^P \geq \max(\widetilde{C}^B, \widetilde{C}^v)$.

Nous montrons à présent d'où viennent les bornes explicites données dans la proposition. Nous ne traiterons que le cas de $R^B$, celui de $R^v$ étant tout à fait similaire.

Commençons par la propriété de quasi-inversion. Par symétrie et par ce qui a été dit auparavant, la seule partie nécessitant une investigation est l'anneau $D_{12}(r^{1/4}) - D_{12}(r^{1/2})$, où $D^B_{u_{B,\rho}}$, $D^B_{u_{B,1,\rho}}$ et $D^B_{u_{B,2,\rho}}$ coïncident avec l'opérateur de Cauchy-Riemann standard. Dans cette région nous obtenons :

$$\begin{aligned} D^B_{u_\rho}\xi_\rho &= D^B_{u_\rho}\xi_1 + (\overline{\partial}_{J_B}\beta_{r^{1/4}})(\xi_2 - \xi_{1,2}) + \beta_{r^{1/4}} D^B_{u_\rho}(\xi_2 - \xi_{1,2}) \\ &= I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned}$$

Mais

$$I_1 = D_{u_{1,\rho}} Q_{u_{1,\rho}} \eta_1(z_{12}) = \eta.$$

Pour $I_3$, nous avons déjà mentionné que $D^B_{u_\rho}\xi_{1,2} = 0$, et il s'avère que ceci s'applique aussi à $D^B_{u_\rho}(\xi_2)$ étant donné que $\eta_2(z_{21})$ s'annule dans l'anneau $D_{12}(r^{1/4}) - D_{12}(r^{1/2})$. Il ne nous reste donc plus qu'à estimer $I_2$. Nous avons la série d'inégalités suivante :

$$\begin{aligned}
\|I_2\|_{L^p} &\leq \|\nabla\beta_{r^{1/4}}(\xi_1 - \xi_{1,2})\|_{L^p} \\
&\leq \left(\int_{D_{12}(r^{1/4})-D_{12}(r^{1/2})} |\nabla\beta_{r^{1/4}}|^p|\xi_1 - \xi_{1,2}|^p dvol_{\Sigma_1}\right)^{1/p} \\
&\leq \frac{2C_1\|\xi_1 - \xi_{1,2}\|_{W^{1,p}}}{|\log r^{1/4}|}\left(\int_{D_{12}(r^{1/4})-D_{12}(r^{1/2})} \frac{1}{|z_{12}|}^2 dvol_{\Sigma_1}\right)^{1/p} \\
&\leq \frac{2C_1c_B\|\eta\|_{L^p}}{|\log r|}\left(\int_{r^{1/4}}^{r^{1/2}} \frac{1}{s}ds\right)^{1/p} \\
&\leq \frac{2C_1c_B\|\eta\|_{L^p}}{|\log r|^{1-1/p}}
\end{aligned}$$

et nous obtenons le résultat désiré en choisissant $C^B \geq 4C_1c_B$. Notons que la troisième inégalité est due au fait que pour $p > 2$, tout élément de $W^{1,p}(\mathbb{R}^2)$ s'annulant en 0 est en particulier Hölder continu avec coefficient $\mu = 1 - 2/p$. Notons également que la quatrième inégalité suit des estimations uniformes du lemme 5.3.3.

Pour l'estimation de la norme opérateur de $R^B$, notons pour commencer qu'en dehors de l'anneau $D_{12}(r^{1/4}) - D_{12}(r^{3/4}) \sim D_{21}(r^{1/4}) - D_{21}(r^{3/4})$ nous avons

$$\|R^B_{u_\rho}\eta\|_{W^{1,p}} \leq \|Q_{w_\rho}\eta\|_{W^{1,p}} \leq c^B\|\eta\|_{L^p},$$

où $c^B$ est la constante du lemme 5.3.3. Par symétrie, il ne reste donc qu'à estimer la norme $W^{1,p}$ de $\xi_\rho$ dans la région $D_{12}(r^{1/4}) - D_{12}(r^{1/2})$. En l'occurrence, dans ce domaine que nous noterons par $A$ pour simplifier, la norme $W^{1,p}$ de $\xi_\rho$ est donnée par :

$$\|\xi_\rho\|_{W^{1,p}(A)} \leq \|\xi_1\|_{W^{1,p}(A)} + \|\xi_2 - \xi_{12}\|_{W^{1,p}(A)} + \|\nabla\beta_{r^{1/4}}(\xi_2 - \xi_{12})\|_{L^p(A)}.$$

Comme les deux premiers termes du membre de droite sont bornés grâce à l'estimation (5.3.3), le seul terme à investiguer est celui impliquant le gradient de $\beta_{r^{1/4}}$. Mais en procédant de la même façon que pour la première estimation nous avons que :

$$\|\nabla\beta_{r^{1/4}}(\xi_1 - \xi_{1,2})\|_{L^p} \leq \frac{c}{|\log r|^{1-1/p}}\|\eta\|_{L^p},$$

et nous pouvons alors conclure.

□

Ainsi pour des paramètres de recollement assez petit, $D_{u_\rho} R_{u_\rho}$ est inversible et on peut poser sans crainte :

$$Q_{u_\rho} := R_{u_\rho}(D_{u_\rho} R_{u_\rho})^{-1}.$$

Donc, $Q_{u_\rho}$ est l'unique inverse à droite pour $D_{u_\rho}$ ayant la même image que $R_{u_\rho}$. On définit similairement les inverses à droite $Q^B_{\pi(u)_\rho}$ pour $D^B_{\pi(u)_\rho}$ et $Q^v_{u_\rho}$ pour $D^v_{u_\rho}$. Notons que $D_{u_\rho} R_{u_\rho}$ est de la forme :

$$DR := \begin{pmatrix} D^h R^h & 0 \\ L_{DR} & D^v R^v \end{pmatrix}, \tag{5.3.13}$$

où

$$L_{DR,u_\rho} = L_{u_\rho} R^h_{u_\rho} - D^v \Gamma^v Q^v_{w_\rho} L_{w_\rho} (Q^B_{\pi(w)_\rho})^h \Lambda^h. \tag{5.3.14}$$

Nous voyons aussi directement que l'inverse est donné par :

$$(DR)^{-1} := \begin{pmatrix} (D^h R^h)^{-1} & 0 \\ L_{(DR)^{-1}} := (D^v R^v)^{-1} L_{DR} (D^h R^h)^{-1} & (D^v R^v)^{-1} \end{pmatrix}. \tag{5.3.15}$$

Nous avons :

**Lemme 5.3.4.** *L'opérateur $Q_{u_\rho}$ est donné sous forme matricielle par :*

$$Q_{u_\rho} := \begin{pmatrix} (Q^B_{\pi(u)_\rho})^h & 0 \\ -Q^v_{u_\rho} \circ L_{u_\rho} \circ (Q^B_{\pi(u)_\rho})^h & Q^v_{u_\rho} \end{pmatrix}. \tag{5.3.16}$$

**Preuve:** Remarquons pour commencer qu'étant donné que tous les opérateurs en jeu sont triangulaires inférieurs, nous devons nécessairement avoir que :

$$Q_{u_\rho} := \begin{pmatrix} (Q^B_{\pi(u)_\rho})^h & 0 \\ L''_{u_\rho} & Q^v_{u_\rho} \end{pmatrix}. \tag{5.3.17}$$

Nous identifions à présent $L''_{u_\rho}$. Afin de simplifier les notations nous omettrons de mentionner $u_\rho$ et nous poserons $(D^B)^h = D^h$. Comme remarqué dans la proposition précédente, $L_{w_\rho}$ s'annule dans la région

$$D_{12}(r^{1/4}) - D_{12}(r^{3/4}) \sim D_{21}(r^{1/4}) - D_{21}(r^{3/4}),$$

impliquant par la même que l'image de $L_{w_\rho}$ est dans l'image de $\Lambda^v$, qui est injective, et nous pouvons donc écrire :

$$L_R = -R^v(\Lambda^v)^{-1}L_{w_\rho}(Q^B_{\pi(w)_\rho})^h\Lambda^h.$$

Posons dès à présent $\widetilde{L} := (\Lambda^v)^{-1}L_{w_\rho}(Q^B_{\pi(w)_\rho})^h\Lambda^h$. Nous avons par définition que :

$$\begin{aligned}
L'' &= L_R(D^hR^h)^{-1} + R^vL_{(DR)^{-1}} \\
&= -R^v\widetilde{L}(D^hR^h)^{-1} - Q^vL_{DR}(D^hR^h)^{-1} \\
&= (-R^v\widetilde{L} - Q^vLR^h + Q^vD^vR^v\widetilde{L})(D^hR^h)^{-1} \\
&= -Q^vLR^h(D^hR^h)^{-1} \\
&= -Q^vL(Q_B)^h.
\end{aligned}$$

□

Comme pour des valeurs assez petites de $\rho$, l'opérateur $DR$ est inversible, et étant donné que

$$(DR)^{-1} = \sum_k (Id - DR)^k,$$

nous déduisons des estimations précédentes que :

**Corollaire 5.3.5.** *Soit $p > 2$, $U_{\mathcal{S}_P}$ et $U_{\mathcal{S}_B}$ comme auparavant. Il existe alors des constantes $c^P$, $c^B$, et $c^v$ indépendantes de $\rho$ et telles que pour tout élément $(\mathrm{j}, u)$ de $U_{\mathcal{S}_P}$ nous avons :*

$$\|Q_{u_\rho}\eta\|_{W^{1,p}} \leq c^P\|\eta\|_{L^p}, \quad \|Q^v_{u_\rho}\eta\|_{W^{1,p}} \leq c^v\|\eta\|_{L^p}, \quad \|Q^B_{\pi(u)_\rho}\eta\|_{W^{1,p}} \leq c^B\|\eta\|_{L^p}.$$

## 5.4. Applications de recollement

Encore une fois, soit $\mathcal{S}_P = (T, D, \vec{\sigma})$ une donnée de strate stable pour des applications $J_P$-holomorphes avec $l$ points marqués, et soit $C = (u, \mathrm{j})$ un élément de $\mathcal{M}_{\mathcal{S}_P}(P, J_P)$. Soit $\mathcal{S}_B$ l'image de $\mathcal{S}_P$ sous l'application $\mathcal{F}_\pi$, $\mathcal{S}^u_B := \pi(\mathcal{S}_P)$, et posons $C_B := \mathcal{F}_\pi(C) = (u_B, \mathrm{j})$. Finalement, soit $\mathcal{S}$ l'image de $\mathcal{S}_P$ via l'application oubli $\mathcal{F}_P$ et dénotons par $\mathcal{S}^u$ l'image de $\mathcal{S}$ par $\mathcal{F}_{map}$, l'application qui consiste à oublier la donnée homologique (les applications).

**Remarque 5.4.1.** *Remarquons bien que à priori, $\mathcal{S}_B \neq \mathcal{S}_B^u$ et $\mathcal{S}^u \neq \mathcal{S}$. En fait, l'indice u vise à souligner le fait que ces données de strate sont à priori instables. On voit aisément que si $\mathcal{F}_P = \mathcal{F}_{map}$ alors nous devons aussi avoir $\mathcal{F}_\pi = \pi$ et ainsi $\mathcal{S}_B = \mathcal{S}_B^u$ et $\mathcal{S}^u = \mathcal{S}$. Toutefois, $\mathcal{F}_\pi = \pi$ n'implique pas forcément que $\mathcal{F}_P = \mathcal{F}_{map}$.*

Nous allons dans ce qui suit expliciter la procédure de gluing dans le cadre fibré.

### 5.4.1. Applications de recollement dans le cas stable.

Dans ce qui suit nous allons supposer que $\mathcal{F}_P$, et ainsi $\mathcal{F}_\pi$ et $\mathcal{F}_B$, préservent la structure d'arbre, où autrement dit que $(\pi(u), \mathbf{j})$ et $\mathbf{j}$ sont stables.

Considérons l'orbi-fibré $\mathcal{L}_\mathcal{S}$ au-dessus de $\mathcal{M}_\mathcal{S}$ défini dans la section sur le recollement des courbes nodales. Les applications $\mathcal{F}_P$ et $\mathcal{F}_B$ induisent respectivement un orbi-fibré au-dessus de $\mathcal{M}_{\mathcal{S}_P}(P, J_P)$ et $\mathcal{M}_{\mathcal{S}_B}(B, J_B)$, qui sont donnés par les pull-backs :

$$\mathcal{L}_{\mathcal{S}_P} := \mathcal{F}_P^* \mathcal{L}_\mathcal{S}, \quad \mathcal{L}_{\mathcal{S}_B} := \mathcal{F}_B^* \mathcal{L}_\mathcal{S}.$$

Un élément de $\mathcal{L}_{\mathcal{S}_P}$ est donné par un triplet $(u, \mathbf{j}, \rho)$ où $\mathbf{j} \in \mathcal{M}_\mathcal{S}$. Similairement, les points de $\mathcal{L}_{\mathcal{S}_B}$ sont donnés par des triplets $(u_B, \mathbf{j}, \rho)$. Notons enfin que $\mathcal{F}_\pi$ induit l'application fibrée suivante

$$\widetilde{\mathcal{F}}_\pi : \mathcal{L}_{\mathcal{S}_P} \longrightarrow \mathcal{L}_{\mathcal{S}_B}, \quad (u, \mathbf{j}, \rho) \mapsto (\pi(u), \mathbf{j}, \rho).$$

Le but ici est de construire une application $J_P$-holomorphe à partir d'un élément de $\mathcal{L}_{\mathcal{S}_P}$, ainsi qu'une application $J_B$-holomorphe à partir des éléments de $\mathcal{L}_{\mathcal{S}_B}$, de façon compatible avec la projection $\pi$.

**Remarque 5.4.2.** *Pour plus de simplicité dans l'exposition, nous supposerons ici que les applications en jeu ne possèdent pas d'automorphisme. Dans le cas contraire, les applications de recollement que nous allons construire sont en réalité définies sur des systèmes uniformisants locaux compatibles avec la projection $\pi$,*

$$(\widetilde{W}^P, Aut(u, \mathbf{j}), p_{W^P}) \quad et \quad (\widetilde{W}^B, Aut(\pi(u), \mathbf{j}), p_{W^B}),$$

*pour des voisinages $W^P$ et $W^B$, respectivement autour des applications holomorphes stables $(u,\mathrm{j})$ et $(\pi(u),\mathrm{j})$. Ainsi, les domaines des applications de recollement $Gl^P$ et $Gl^B$ ci-dessous sont véritablement donnés par*

$$\mathcal{F}_P^* p_{W^P}^* \mathcal{L}_S = \mathcal{L}_{S_P}|_{\widetilde{W}^P} \quad et \quad \mathcal{F}_B^* p_{W^B}^* \mathcal{L}_S = \mathcal{L}_{S_B}|_{\widetilde{W}^B}.$$

*Toutefois, on voit directement dans la construction de ces applications de recollement que celles-ci sont respectivement $Aut(u,\mathrm{j})$ et $Aut(\pi(u),\mathrm{j})$ équivariantes de sorte qu'elles sont en fait bien définies sur les orbi-fibrés*

$$\mathcal{L}_{S_P}|_{W^P} \quad et \quad \mathcal{L}_{S_B}|_{W^B}.$$

*Remarquons enfin que la condition de stabilité est justement essentielle dans ce cas, afin d'obtenir cette équivariance.*

L'opération de pré-recollement définit des applications lisses :

$$\begin{aligned} \mathrm{prgl}^P : \mathcal{L}_{S_P} &\longrightarrow \mathcal{B}_P(\sigma) \\ (u,\mathrm{j},\rho) &\mapsto (u_\rho, \mathrm{j}_\rho) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathrm{prgl}^B : \mathcal{L}_{S_B} &\longrightarrow \mathcal{B}_B(\sigma_B) \\ (u_B,\mathrm{j},\rho) &\mapsto (u_{B,\rho}, \mathrm{j}_\rho), \end{aligned}$$

qui par le lemme 5.2.1 satisfont la propriété :

$$\pi \circ \mathrm{prgl}^P = \mathrm{prgl}^B \circ \widetilde{\mathcal{F}}_\pi.$$

Rappelons que les applications pré-recollées sont lisses et approximativement holomorphes, et qu'elles ont pour domaine la surface de Riemann surface lisse (avec points marqués) $\Sigma_\rho$ que nous écrirons parfois $\mathrm{j}_\rho := gl_S(\mathrm{j},\rho)$ pour mettre l'accent sur la structure conforme. Les recollements holomorphes seront en particulier des applications de $(\Sigma_\rho)$ obtenues par perturbations du pré-recollement dans des directions transverses aux noyaux des opérateurs $D_{u_\rho}$ et $D^B_{u_{B,\rho}}$. En d'autres termes, nous cherchons des éléments

$$\eta \in B_{\delta_P}(0) \subset L^p(\Lambda^{0,1}_{J_P}(S^2, u_\rho^* TP)), \quad \eta_B \in B_{\delta_B}(0) \subset L^p(\Lambda^{0,1}_{J_B}(S^2, u_{B,\rho}^* TB)),$$

$\delta_P > \delta_B$ assez petits, solutions des équations de Cauchy-Riemann :

$$\overline{\partial}_{J_P}(\exp_{u_\rho} Q_{u_\rho}\eta) = 0, \quad \overline{\partial}_{J_B}(\exp_{u_{B,\rho}} Q^B_{u_{B,\rho}}\eta_B) = 0,$$

et tels que

$$\pi_*\eta = \eta_B.$$

L'existence et l'unicité de ces solutions nous sont donnés par la version paramétrique suivante, du théorème des fonctions implicites donné dans [40], [29], [3].

**Proposition 5.4.1.** (***Théorème des fonctions implicites paramétriques***) *Soient $X$ et $Y$ deux espaces de Banach fibrant au-dessus d'une variété lisse $B$, avec des normes dans les fibres qui évoluent continûment par rapport à $B$. Soit $f : X \longrightarrow Y$ une application fibrée lisse telle que $\forall b \in B$, l'application $f_b$ est Fredholm et surjective. Soit $G : Y \longrightarrow X$ une $B$-famille lisse d'inverses à droite lisse uniformément bornée, au-dessus de $B$, par une constante $c_2$, i.e*

$$\|G_b\| \leq c_2, \quad Df_b(0) \circ G_b = Id_b,$$

*pour tout $b \in B$. Supposons qu'il existe une constante uniforme sur $B$, $c_1$ telle que*

$$\|N_b(x_1) - N_b(x_2)\|_Y \leq c_1(\|x_1\|_X + \|x_2\|_X)\|x_1 - x_2\|_X,$$

*pour tout $b \in B$ et $x_1, x_2 \in X_b$, où*

$$N_b(x) := f_b(x) - f_b(0) - Df_b(0)x,$$

*désigne ici l'expansion de $f_b$ autour de 0. Supposons enfin que*

$$\|f_b(0)\|_Y < \epsilon,$$

*pour tout $b \in B$, où $\epsilon$ est une constante telle que $\epsilon c_1 << 1$. Alors pour un nombre $\delta >> \epsilon$ tel que*

$$\delta c_1 < \frac{1}{2},$$

*et si on désigne par $B_\delta(0)$ le voisinage de la section nulle de $Y$ au-dessus de $B$ qui restreint à chaque fibre $Y_b$ nous donne $B_{b,\delta}(0)$, la boule de rayon $\delta$ autour de 0, il existe une unique section*

$$\gamma : B \longrightarrow B_\delta(0) \subset Y,$$

*satisfaisant*

$$f \circ G(\gamma) = 0, \quad et \quad \|G_b(\gamma(b))\|_X < 2c_1\epsilon,$$

*pour tout* $b \in B$.

**Preuve:** Pour la preuve, on réfèrera au chapitre concernant le gluing dans [3].

□

Nous appliquons le théorème ci-dessus dans la situation suivante. Soient

$$X^P := (\mathrm{prgl}^P)^* T\mathcal{B}_P, \quad Y^P := \mathcal{E}_P^p(J_P), \quad X^B := (\mathrm{prgl}^B)^* T\mathcal{B}_B, \quad Y^B := \mathcal{E}_B^p(J_B).$$

Par définition, les fibres de $(\mathrm{prgl}^P)^* T\mathcal{B}_P$ et $(\mathrm{prgl}^B)^* T\mathcal{B}_B$ au-dessus de $(u, \mathbf{j}, \rho)$ et $(u_B, \mathbf{j}, \rho)$ sont respectivement données par :

$$W^{1,p}(\Sigma_\rho, u_\rho^* TP), \text{ et } W^{1,p}(\Sigma_\rho, u_{B,\rho}^* TB).$$

Les applications de Fredholm (de fibré) qui nous intéressent sont les suivantes :

$$F^P : (\mathrm{prgl}^P)^* T\mathcal{B}_P \longrightarrow \mathcal{E}_P^p(J_P), \quad ((u, \mathbf{j}, \rho), \xi) \mapsto \Phi_{P,u_\rho}^{-1}(\xi) \overline{\partial}_{\mathbf{j}_\rho, J_P}(\exp_{u_\rho} \xi),$$

où $\Phi_P$ désigne ici le transport parallèle le long de la connexion Hermitienne induite par $\nabla^P$ (exp est l'application exponentielle relative à $\nabla^P$), et

$$F^B : (\mathrm{prgl}^B)^* T\mathcal{B}_B \longrightarrow \mathcal{E}_B^p(J_B), \quad ((u_B, \mathbf{j}, \rho), \xi) \mapsto \Phi_{B,u_{B,\rho}}^{-1}(\xi) \overline{\partial}_{\mathbf{j}_\rho, J_B}(\exp_{u_{B,\rho}} \xi),$$

où $\Phi_B$ est le transport parallèle le long de la connexion Hermitienne induite cette fois par $\nabla^B$. Soit

$$F^P((u, \mathbf{j}, \rho), \xi) := F^P_{(u,\mathbf{j},\rho)}(\xi) \text{ et } F^B((u_B, \mathbf{j}, \rho), \xi) := F^B_{(u_B \mathbf{j},\rho)}(\xi).$$

Lorsque $\xi = 0$, ces applications coïncident respectivement avec

$$\overline{\partial}_{\mathbf{j}_\rho, J_P} u_\rho \text{ et } \overline{\partial}_{\mathbf{j}_\rho, J_B} u_\rho,$$

et nous avons donc que :

$$DF^P_{(u,\mathbf{j},\rho)}(0)(\xi) = D_{u_\rho}\xi, \quad DF^B_{(u_B,\mathbf{j},\rho)}(0)(\xi) = D^B_{u_{B,\rho}}\xi.$$

De la proposition 5.4.1, et des estimations données dans les sections précédentes, nous obtenons finalement :

**Proposition 5.4.2.** *Soit $p > 2$ et soient $U_{S_P}$ et $U_{S_B}$ comme précédemment. Il existe des constantes $\epsilon_P$ et $\epsilon_B$ de telle sorte que pour tout*

$$(u, \mathrm{j}, \rho) \in \mathcal{L}_{S_P,\epsilon_P}|_{U_{S_P}} \quad et \quad (u_B, \mathrm{j}, \rho) \equiv (\pi(u), \mathrm{j}, \rho) \in \mathcal{L}_{S_B,\epsilon_B}|_{U_{S_B}};$$

*nous ayons des constantes uniformes, $c_1^B$ et $c_1^P$ donnant les estimations du lemme 5.2.3, ainsi que $\epsilon_1^P$, $\epsilon_1^B$, $c_2^P$ et $c_2^B$ pour lesquelles :*

$$\|\overline{\partial}_{J_P} u_\rho\|_{L^p} \leq \epsilon_1^P \quad et \quad \|\overline{\partial}_{J_B} u_{B,\rho}\|_{L^p} \leq \epsilon_1^B,$$

*et*

$$\|Q_{u_\rho}\| \leq c_2^P \quad et \quad \|Q^B_{u_{B,\rho}}\| \leq c_2^B.$$

*Par conséquent, il existe des constantes positives $\delta_P$ et $\delta_B$, telles que :*

$$\delta_P \geq \delta_B, \quad \delta_P c_1^P < \frac{1}{2}, \quad \delta_B c_1^B < \frac{1}{2},$$

*ainsi que des applications lisses :*

$$f^B : \mathcal{L}_{S_B,\epsilon_B}|_{U_{S_B}} \longrightarrow B_{\delta_B}(0), \quad et \quad f^P : \mathcal{L}_{S_P,\epsilon_P}|_{U_{S_P}} \longrightarrow B_{\delta_P}(0),$$

*où*

$$B_{\delta_P}(0) \subset L^p(\Lambda^{0,1}_{J_P}(S^2, u_\rho^* TP)), \quad et \quad B_{\delta_B}(0) \subset L^p(\Lambda^{0,1}_{J_B}(S^2, u_{B,\rho}^* TB)),$$

*avec $\delta_B >> \epsilon_1^B$ et $\delta_B >> \epsilon_1^B$, de telle sorte que $f^P(u, \mathrm{j}, \rho)$ et $f^B(u_B, \mathrm{j}, \rho)$ sont les uniques solutions aux équations :*

$$\overline{\partial}_{J_P}(\exp_{u_\rho} Q_{u_\rho} f^P(u, \mathrm{j}, \rho)) = 0, \quad et \quad \overline{\partial}_{J_B}(\exp_{u_{B,\rho}} Q^B_{u_{B,\rho}} f^B(u_B, \mathrm{j}, \rho)) = 0,$$

*et satisfont les estimations :*

$$\|f^P(u, \mathrm{j}, \rho)\|_{L^p} < 2\epsilon_1^P \quad et \quad \|f^B(\pi(u), \mathrm{j}, \rho)\|_{L^p} < 2\epsilon_1^B.$$

*De surcroît, nous avons la propriété suivante :*

$$\pi_* \circ f^P = f^B \circ \mathcal{F}_\pi.$$

**Preuve:** Le résultat sur l'existence et l'unicité des fonctions découle directement du lemme du théorème des fonctions implicites et du fait qu'il est possible en vue des estimations données dans les sections précédentes de trouver $\epsilon_B$ et $\epsilon_P$. Nous allons maintenant montrer la toute dernière égalité. Rappelons que par le lemme 5.2.1, nous avons $\pi(u_\rho) = (\mathcal{F}_\pi(u))_\rho =: u_{B,\rho}$. Posons maintenant $\xi^P = Q^P_{u_\rho} f^P(u, \mathbf{j}, \rho)$ et $f^P(u, \mathbf{j}, \rho) \in B_{\delta_P}(0)$ alors par construction

$$\pi(Gl^P(u, \mathbf{j}, \rho)) = \pi(\exp_{u_\rho}(\xi^P)) = \exp_{u_{B,\rho}} \pi_* \xi^P.$$

Donc $\xi^P$ est l'unique solution à l'équation

$$\overline{\partial}_{J_P} \exp_{u_\rho}(\xi^P) = 0,$$

et nous obtenons par holomorphicité de la projection $\pi$ que :

$$\overline{\partial}_{J_B} \exp_{u_{B,\rho}} \pi_* \xi^P = 0.$$

Or :

$$\xi^B := \pi_* \xi^P = \pi_*(Q^P_{u_\rho} f^P(u, \mathbf{j}, \rho)) = Q^B_{u_{B,\rho}} \pi_* f^P(u, \mathbf{j}, \rho),$$

impliquant que $\xi^B$ est en fait dans l'image de $Q^B_{u_{B,\rho}}$. Par construction nous avons que $\|\xi^B\| < 2c_2^B \epsilon_1^B$, d'où le résultat énoncé.

□

**Remarque 5.4.3.** *En posant*

$$f^P(u, \mathbf{j}, \rho) = (f^{P,h}(u, \mathbf{j}, \rho), f^{P,v}(u, \mathbf{j}, \rho)) \in \mathcal{E}^{p,h}_{P,u_\rho} \oplus \mathcal{E}^{p,v}_{P,u_\rho},$$

*nous obtenons que*

$$f^{P,h}(u, \mathrm{j}, \rho) = (f^B(u_{B,\rho}, \mathrm{j}, \rho))^h,$$

*le relevé horizontal de $f^B$.*

Nous définissons à présent les applications de recollement dans $B$ et dans $P$.

**Définition 5.4.1.** *Soient $U_{S_P}$, $\epsilon_P$, $U_{S_B}$ et $\epsilon_B$ comme dans le théorème précédent.* ***L'application de recollement*** *dans $B$ est l'application lisse donnée par :*

$$Gl_{S_B} : \mathcal{L}_{S_B, \epsilon_B}|_{U_{S_B}} \longrightarrow \mathcal{M}_{0,l}(B, \sigma_B, J_B), \quad (u_B, \mathrm{j}, \rho) \mapsto (\mathrm{j}_\rho, \exp_{u_{B,\rho}} Q^B_{u_{B,\rho}}(f^B(u_B, \mathrm{j}, \rho))).$$

*De façon similaire, on définit le recollement dans $P$ :*

$$Gl_{S_P} : \mathcal{L}_{S_P, \epsilon_P}|_{U_{S_P}} \longrightarrow \mathcal{M}_{0,l}(P, \sigma, J_P), \quad (u, \mathrm{j}, \rho) \mapsto (\mathrm{j}_\rho, \exp_{u_\rho} Q_{u_\rho}(f^P(u, \mathrm{j}, \rho))).$$

Nous avons le résultat suivant :

**Théorème 5.4.3.** *Soient $U_{\mathcal{S}_P}$, $\epsilon_P$, $U_{\mathcal{S}_B}$ et $\epsilon_B$ comme dans le théorème précédent, alors*

$$\pi \circ Gl_{\mathcal{S}_P} = Gl_{\mathcal{S}_B} \circ \mathcal{F}_\pi.$$

**Preuve:** Rappelons pour commencer que la projection du pré-recollement $u_\rho$ par $\pi$, nous donne le pré-recollement $u_{B,\rho}$ de l'application $u_B := \pi(u)$. Alors le théorème suit de la suite d'égalités suivante :

$$\begin{aligned}
\pi \circ Gl_{\mathcal{S}_P}(u, \mathbf{j}, \rho) &= \pi(\exp_{u_\rho} Q_{u_\rho} f^P(u, \mathbf{j}, \rho)) \\
&= \exp_{\pi(u_\rho)}(\pi_* Q_{u_\rho} f^P(u, \mathbf{j}, \rho)) \\
&= \exp_{\pi(u)_\rho}(Q^B_{\pi(u)_\rho} \pi_* f^P(u, \mathbf{j}, \rho)) \\
&= \exp_{u_{B,\rho}}(Q^B_{u_{B,\rho}} f^B(u_B, \mathbf{j}, \rho)) \\
&= Gl_{\mathcal{S}_B}(\pi(u), \mathbf{j}, \rho) = Gl^B \circ \mathcal{F}_\pi(u, \mathbf{j}, \rho).
\end{aligned}$$

□

Voici une autre propriété particulièrement importante des applications de recollement :

**Proposition 5.4.4.** *Soient $\mathcal{S}_P$, $\mathcal{S}_B$, et $\mathcal{S}$ comme au début de cette section, et considérons $U_{\mathcal{S}_P}$ et $U_{\mathcal{S}_B}$ comme plus haut ainsi que $\delta_P$ et $\delta_B$ comme dans la proposition. Alors il existe des ouverts propres $U'_{\mathcal{S}_P} \subset U_{\mathcal{S}_P}$, $U'_{\mathcal{S}_B} \subset U_{\mathcal{S}_B}$ tels que $\mathcal{F}_\pi U'_{\mathcal{S}_P} = U'_{\mathcal{S}_B}$, et des constantes $\delta'_P < \delta_P$, $\delta'_B < \delta_B$ pour lesquelles les applications $Gl_P|_{U'_{\mathcal{S}_P}}$ et $Gl_B|_{U'_{\mathcal{S}_B}}$ sont des difféomorphismes locaux.*

**Preuve:** Nous omettrons la preuve, qui est une adaptation directe, au cas fibré des arguments donnés dans [29] chapitre 10, ou encore [3] théorème 7.6, au vu de la forme des inverses à droites.

□

On peut appliquer les méthodes ci-dessus afin d'obtenir des application de recollement entre deux strates données des espaces de modules considérés. Précisément, soient $\mathcal{S}_P$ et $\mathcal{S}'_P$ deux données de strate stables telles que $\mathcal{S}_P < \mathcal{S}'_P$. Soient $\mathcal{S}_B$ et $\mathcal{S}'_B$ les projections correspondantes via $\mathcal{F}_\pi$, et $\mathcal{S}$ ainsi que $\mathcal{S}'$ sont les projections via $\mathcal{F}_P$. Nous avons donc que $\mathcal{S} < \mathcal{S}'$ et $\mathcal{S}_B < \mathcal{S}'_B$. On supposera que $\mathcal{S}^u = \mathcal{S}$ de sorte que

$$(\mathcal{S}')^u = \mathcal{S}', \;\; \mathcal{S}_B = \mathcal{S}_B^u, \;\; \mathcal{S}'_B = (\mathcal{S}'_B)^u.$$

Considérons les fibrés

$$\mathcal{L}_{\mathcal{S},\mathcal{S}'}, \quad \mathcal{L}_{\mathcal{S}_B,\mathcal{S}'_B} := \mathcal{F}_B^* \mathcal{L}_{\mathcal{S},\mathcal{S}'} \;\text{ et }\; \mathcal{L}_{\mathcal{S}_P,\mathcal{S}'_P} := \mathcal{F}_P^* \mathcal{L}_{\mathcal{S},\mathcal{S}'},$$

et soient $U_P$ et $U_B$ des ouverts propres dans les strates données par $\mathcal{S}_P$ et $\mathcal{S}_B$ et tels que $\mathcal{F}_\pi U_P = U_B$. Par la construction précédente, il existe des constantes positives $\epsilon_P$ et $\epsilon_B$ et des difféomorphismes :

$$Gl_{\mathcal{S}_B,\mathcal{S}'_B} : \mathcal{L}_{\mathcal{S}_B,\mathcal{S}'_B,\epsilon_B}\big|_{U_B} \longrightarrow \mathcal{M}_{\mathcal{S}'_B}(B, J_B)$$

et

$$Gl_{\mathcal{S}_P,\mathcal{S}'_P} : \mathcal{L}_{\mathcal{S}_P,\mathcal{S}'_P,\epsilon_P}\big|_{U_P} \longrightarrow \mathcal{M}_{\mathcal{S}'_P}(P, J_P),$$

qui sont compatibles avec $\pi$. Par définition de $\mathcal{L}_{\mathcal{S}_P,\mathcal{S}'_P}$, un point de $\mathcal{L}_{\mathcal{S}_P}$ est donné par un uplet

$$(u, \mathrm{j}, \rho_1, \rho_2),$$

avec $(u, \mathrm{j}, \rho_1) \in \mathcal{L}_{\mathcal{S}_P,\mathcal{S}'_P}$ et $\rho_2$ désigne les paramètres de gluing restants. Alors dans ces notations, l'application $Gl_{\mathcal{S}_P,\mathcal{S}'_P}$ induit l'application suivante :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}_{\mathcal{S}_P} & \longrightarrow & \mathcal{L}_{\mathcal{S}'_P} \\ (u, \mathrm{j}, \rho_1, \rho_2) & \mapsto & (Gl_{\mathcal{S}_P,\mathcal{S}'_P}(u, \mathrm{j}, \rho_1), \rho_2). \end{array}$$

On observe la même chose pour $Gl_{\mathcal{S}_B,\mathcal{S}'_B}$ et il en découle, comme dans le cas des surfaces nodales, que :

**Lemme 5.4.5.**

$$Gl^*_{\mathcal{S}_B,\mathcal{S}'_B} \mathcal{L}_{\mathcal{S}'_B} = \mathcal{L}_{\mathcal{S}_B} \;\; \textit{et} \;\; Gl^*_{\mathcal{S}_P,\mathcal{S}'_P} \mathcal{L}_{\mathcal{S}'_P} = \mathcal{L}_{\mathcal{S}_P}.$$

Supposons à présent que nous ayons trois strates $\mathcal{S}''_P$ se projetant sur $\mathcal{S}''_B$ et telles que $\mathcal{S}'_P < \mathcal{S}''_P$ de projections $\mathcal{S}'_B < \mathcal{S}''_B$. Posons

$$W_{\mathcal{S}_P,\mathcal{S}'_P} := \mathrm{Im}(Gl_{\mathcal{S}_P,\mathcal{S}'_P}) \;\text{ et }\; W_{\mathcal{S}_B,\mathcal{S}'_B} := \mathrm{Im}(Gl_{\mathcal{S}_B,\mathcal{S}'_B}).$$

Comme les applications $Gl_{S_P,S'_P}$ et $Gl_{S_B,S'_B}$ sont des difféomorphismes, nous pouvons définir de nouvelles applications de recollement :

$$Gl'_{S'_B,S''_B} : \mathcal{L}_{S'_B,S''_B,\epsilon_B}\big|_{W_{S_B,S'_B}} \longrightarrow \mathcal{M}_{S'_B}(B,J_B)$$

et

$$Gl_{S_P,S'_P} : \mathcal{L}_{S_P,S'_P,\epsilon_P}\big|_{W_{S_P,S'_P}} \longrightarrow \mathcal{M}_{S'_P}(P,J_P)$$

données respectivement par

$$Gl'_{S'_B,S''_B} := Gl_{S_B,S''_B} \circ Gl^{-1}_{S_B,S'_B} \text{ et } Gl'_{S'_P,S''_P} := Gl_{S_P,S''_P} \circ Gl^{-1}_{S_P,S'_P},$$

où l'on vérifie encore une fois que :

$$Gl'_{S'_B,S''_B} \circ \mathcal{F}_\pi = \mathcal{F}_\pi \circ Gl'_{S'_P,S''_P}.$$

Ces recollements ne correspondent pas à priori aux recollements $Gl_{S'_B,S''_B}$ et $Gl_{S'_B,S''_B}$ construits comme précédemment. Une telle égalité signifierait que le recollement est associatif, ce qui serait envisageable s'il était possible de montrer l'indépendance des choix effectués lors de la construction du gluing (en l'occurrence l'indépendance vis-à-vis du choix d'inverse à droite). Mais dans le contexte présent cela parait difficile. Cependant, nous verrons que ces applications sont proches au sens $C^\infty$ ce qui suffira pour donner aux espaces de modules la structure d'orbifold lisse.

**Remarque 5.4.4.** *Nous devons souligner que le recollement tel que construit ci-dessus existe encore quand bien même les domaines ne sont pas stables. De surcroît, le recollement est un difféomorphisme au niveau paramétré. Pour déduire cela, la condition de stabilité des applications est cruciale.*

### 5.4.2. Gluing : le cas non stable.

Comme déjà constaté dans la section précédente, toute la construction qui y est effectuée s'applique quand bien même les données de strate sont non-stables. Cependant :

- les applications obtenues ne sont définies qu'au niveau paramétré, i.e avant quotient par $\mathrm{Aut}(\mathbf{j})$. Bien que ces applications soient, essentiellement par définition $\mathrm{Aut}(u,\mathbf{j})$ et $\mathrm{Aut}(\pi(u),\mathbf{j})$ équivariantes, nous ne pouvons à priori rien affirmer en ce qui concerne l'action du groupe des reparamétrisations du domaine dans son entièreté.

- le gluing pour les surfaces nodales est dans ce cas ni injectif, ni un difféomorphisme local. Or, nous avions jusqu'à présent paramétrisé nos recollements par ceux des domaines.

Par définition, l'instabilité résulte d'un manque de points marqués permettant de fixer (localement) une paramétrisation, où en d'autres termes une slice de l'action du groupe de reparamétrisations du domaine. Chaque point marqué permet de réduire un degré de liberté pour ces reparamétrisations.

En adoptant l'approche prise dans [**3**], nous introduisons dans la section qui suit, la notion d'applications holomorphes balancées, qui nous permet d'effectuer une réduction du groupe des reparamétrisations du domaine, à partir du moment où nous avons au moins un point marqué, et si l'application est non constante. Cette réduction ne sera que partielle, mais toutefois compacte, ce qui est suffisant pour l'existence d'une section de l'action (slice).

### 5.4.3. Applications holomorphes balancées

Soit $l \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq l < 3$. Dans les trois situations possibles, le domaine des éléments de $\mathcal{M}_{0,l}(P, \sigma, J_P)$ n'est pas stable. Si $\mathbf{j} = [S^2, x_1, ..., x_l]$ désigne l'élément correspondant dans $\overline{\mathcal{M}}_{0,l}$, nous avons dans ce cas que $\mathrm{Aut}(\mathbf{j})$ est un groupe de Lie non-compact (fini-dimensionnel). Il sera utile par la suite de considérer une slice pour cette action de groupe, ou encore de réduire ce groupe d'automorphismes à un groupe compact. Pour ce faire, nous introduisons la notion de courbe holomorphe balancée. Parmi les trois possibilités mentionnées, nous n'allons nous intéresser qu'aux cas $l = 1, 2$.

Cas $l = 1$. Nous savons que $\mathcal{M}_{0,1}$ consiste en un seul élément $\mathrm{j}_1 = [S^2, \infty]$. Ici, nous verrons $S^2$ comme le plan $\mathbb{C}$ avec un point à l'infini noté $\{\infty\}$. Rappelons aussi que le groupe $PSL_2(\mathbb{C})$ agit sur $\mathbb{C}$ via les fractions rationnelles.

Soit $\mathbf{tr} \cong \mathbb{C}$ le groupe des translations du plan complexe et soit $\mathbf{mul} \cong \mathbb{C}^*$ le sous-groupe de $PSL_2(\mathbb{C})$ agissant sur $\mathbb{C}$ par multiplication complexe. Le produit semi-direct

$$\mathcal{G} := \mathrm{tr} \ltimes \mathrm{mul},$$

agit sur $\mathbb{C}$ de la façon suivante :

$$((t, m), z) \mapsto m.(z - t).$$

Nous avons directement que :

**Lemme 5.4.6.**

$$Aut(\mathrm{j}_1) = tr \ltimes mul.$$

Conséquemment nous avons que :

$$\mathcal{M}_{0,1}(P, \sigma, J_P) = \frac{\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathrm{j}_1}(P, \sigma, J_P)}{\mathcal{G}}.$$

Rappelons que la densité d'énergie d'une application $u$ est donnée par $\|du\|^2_{g_{J_P}}$. Nous avons vu dans le chapitre sur les théorèmes de structure que

$$E(u) = \int_{S^2} \|du\|^2_{g_{J_P}} dvolS^2 = E^{vert}(u) + E_B(\pi(u)) < \infty,$$

et que pour un choix donné de forme symplectique sur $P$ de la forme

$$\omega_P := \kappa\tau + \pi^*\omega_B,$$

on obtient

$$E(u) = \omega_P(\sigma) = E^{vert}(u) + \omega_B(\pi_*\sigma).$$

On définit à présent la notion de centre d'énergie.

**Définition 5.4.2.** *Le* ***centre d'énergie*** *d'une application $J_P$-holomorphe $u$ non-constante, est le nombre complexe noté $C(u)$ donné par :*

$$C(u) := \frac{1}{E(u)} \int_{\mathbb{C}} z\|du(z)\|^2_{J_P} dvolS^2. \tag{5.4.1}$$

*De façon analogue, on définit, sous la condition $E^{vert}(u) > 0$, le* ***centre d'énergie verticale*** *de $u$ par :*

$$C^v(u) := \frac{1}{E^{vert}(u)} \int_{\mathbb{C}} z\|du^v(z)\|^2_{J_P} dvolS^2, \tag{5.4.2}$$

*et sous la condition $E_B(\pi(u)) > 0$, le* ***centre d'énergie horizontale*** *de $u$ par :*

$$C^h(u) := C^B(\pi(u)) = \frac{1}{E_B(\pi(u))} \int_{\mathbb{C}} z\|d\pi(u)(z)\|^2_{J_B} dvolS^2, \tag{5.4.3}$$

*qui est en particulier le centre dénergie de $\pi(u)$.*

En d'autres termes, le centre d'énergie est la valeur moyenne pour la densité $\|du\|^2_{g_{J_P}}$ et similairement pour le centre d'énergie verticale et le centre d'énergie horizontale. On vérifie aisément qu'en effectuant la transformation $z \mapsto z - C(u)$, et en posant $C(u(z)) = C$, nous obtenons :

$$C(u(z-C)) = \frac{1}{E(u)} \int_{\mathbf{C}} (z-C)|du(z-C)|^2 dvolS^2 = 0,$$

car l'énergie est un invariant conforme. On obtient la même identité pour $C^v(u)$ ainsi que pour $C^h(u)$. Précisons aussi que la définition du centre d'énergie ne dépend pas de la carte choisie.

**Remarque 5.4.5.** *Il découle directement de la définition que si $u$ est verticale, resp. horizontale, alors $C(u) = C^v(u)$, resp. $C(u) = C^h(u)$.*

Soit $u \in \mathcal{M}_{j_1}(P, \sigma)$ et soit $u_B := \pi(u)$, nous posons

$$\hbar := E(u)/2; \quad \hbar^v := E^{vert}(u)/2 \ \text{ et } \ \hbar^h := E_B(u_B)/2.$$

Nous définissons à présent la notion de courbe balancée dans $B$, qui correspond à la définition donnée dans [3].

**Définition 5.4.3.** *Une application $J_B$-holomorphe non-constante $u_B$ élément de $\widetilde{\mathcal{M}}_{j_1}(B, \sigma_B)$ est dite* ***balancée*** *si :*

$$C^B(u) = 0, \quad et \quad E_B(u_B, B_1(0)) = \hbar^h, \tag{5.4.4}$$

*où $B_1(0) \subset \mathbb{C}$ désigne le disque unité centré en 0 et $E(u_B, B_1(0))$ l'énergie de $u_B$ dans ce disque. Nous dénoterons par $\widetilde{\mathcal{M}}^b_{0,1}(B, \sigma_B)$ l'ensemble de toutes les applications $J_P$-holomorphes balancées avec un point marqué.*

Voici un exemple très simple illustrant quelque peu cette définition.

**Exemple 5.4.1.** *Posons $B = S^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ avec la forme de volume $\omega_0$ induite par la métrique de Fubini-Study i.e*

$$\omega_0(z) := i/2 \frac{1}{(1+|z|^2)^2} dz \wedge d\bar{z}.$$

*En passant en coordonnées polaires, i.e en posant $z = re^{i\theta}$, un simple calcul nous montre que pour $u : S^2 \longrightarrow S^2$, $z \mapsto az + b$, nous avons :*

$$C^B(u) = b, \quad E(u) = \pi \quad et \quad E(u, B_{1/|a|}(b)) = \frac{\pi}{2},$$

*de sorte que $u$ est balancée si et seulement si $|a| = 1$ et $b = 0$.*

Nous pourrions définir de façon analogue une application balancée dans $P$, mais, pour des raisons de compatibilité avec la structure de fibration, qui s'avèrera essentielle par la suite, nous proposons la définition suivante à la place.

**Définition 5.4.4.** *Soit une courbe $J_P$-holomorphe $u \in \widetilde{\mathcal{M}}_{j_1}(P, \sigma)$ avec $\sigma \neq 0$.*

- *Si $\pi_* \sigma \neq 0$, on dira que $u$ est balancée si elle est* ***horizontalement balancée,*** *i.e si*
$$C^h(u) = 0, \quad et \quad E_B(\pi(u), B_1(0)) = \hbar^h. \tag{5.4.5}$$
*Nous dénoterons par $\widetilde{\mathcal{M}}^{b,h}_{0,1}(P, \sigma)$ l'ensemble de toutes les applications $J_P$-holomorphes horizontalement balancées avec un point marqué.*

- *Si $\pi_* \sigma = 0$, autrement dit $u$ est contenue dans une fibre de $\pi$, on dira que $u$ est* ***balancée*** *si elle est* ***verticalement balancée,*** *i.e si*
$$C^v(u) = 0, \quad et \quad E^{vert}(u, B_1(0)) = \hbar^v. \tag{5.4.6}$$
*Nous dénoterons par $\widetilde{\mathcal{M}}^{b,v}_{0,1}(P, \sigma)$ l'ensemble de toutes les applications $J_P$-holomorphes verticalement balancées avec un point marqué.*

**Remarque 5.4.6.** *Pour plus d'homogénéité dans les notations, nous désignerons par $\widetilde{\mathcal{M}}^{b}_{0,1}(P, \sigma)$ l'ensemble des courbes $J_P$-holomorphes balancées avec un point marqué. De sorte que si $\pi_* \sigma = 0$, nous avons $\widetilde{\mathcal{M}}^{b}_{0,1}(P, \sigma) = \widetilde{\mathcal{M}}^{b,v}_{0,1}(P, \sigma)$, et si $\pi_* \sigma \neq 0$ nous avons $\widetilde{\mathcal{M}}^{b}_{0,1}(P, \sigma) = \widetilde{\mathcal{M}}^{b,h}_{0,1}(P, \sigma)$.*

Il résulte directement de la définition que, lorsque $\pi_* \sigma \equiv \sigma_B \neq 0$, la projection $\pi$ induit naturellement une application :
$$\pi : \widetilde{\mathcal{M}}^{b}_{0,1}(P, \sigma) = \widetilde{\mathcal{M}}^{b,h}_{0,1}(P, \sigma) \longrightarrow \widetilde{\mathcal{M}}^{b}_{0,1}(B, \sigma_B).$$

Notons que si nous avions adopté la définition originale de courbe balancée dans $P$, cette application n'existerait pas forcément. En effet, considérons le cas suivant.

**Exemple 5.4.2.** *Soit $P = (S^2 \times S^2, \omega_0 + \omega_0)$, et $B = (S^2, \omega_0)$. La projection $\pi$ est la projection sur le premier facteur et $J_P$ est la structure complexe produit standard. Considérons l'application holomorphe $u(z) = (z, z + b)$. Cette courbe se projette sur $u_B(z) = z$, et nous avons vu dans l'exemple précédent que $C^B(u_B) = 0$ et $E_B(u_B, B_1(0)) = \pi/2 = \hbar^h$, donc balancée. Ici $du^v(z)$ est donné* *par le second terme dans u et donc par l'exemple qui précède, nous avons que* $C^v(u) = b$ *et* $E^{vert}(u, B_1(b)) = \pi/2 = \hbar^v$*, de sorte que* $u(z-b)$ *est verticalement balancée. Notons maintenant que si* $C$ *désigne le centre d'énergie de* $u$ *dans le sens de la définition originale, nous devrions avoir :*

$$C = \frac{1}{E(u)}\left(E^{vert}(u)C^v(u) + E_B(u_B)C^B(u_B)\right) = \frac{1}{2\pi}(\pi b) = \frac{b}{2},$$

*et on voit aisément que*

$$E(u, B^1(b/2)) = \hbar.$$

*Donc* $u(z-b/2)$ *est balancée dans le sens original mais se projette sur* $z - b/2$ *qui n'est pas balancée.*

Nous décrivons à présent le lien existant entre l'espace de modules des courbes balancées et celui des courbe non balancées. Il consiste à reparamétriser les applications holomorphes en jeu, en translatant le centre d'énergie vers 0, puis en multipliant par l'unique dilatation réelle qui "ramène" la moitié de l'énergie totale dans le disque unité.

**Lemme 5.4.7.** *Soit* $\sigma \neq 0$ *représentable par des applications holomorphes et soit* $\sigma_B$ *sa projection. Alors, il existe une application lisse canonique surjective :*

$$\phi_P^b : \widetilde{\mathcal{M}}_{j_1}(P, \sigma, J_P) \longrightarrow \widetilde{\mathcal{M}}_{0,1}^b(P, \sigma, J_P).$$

*Si de surcroît,* $\sigma_B \neq 0$*, il existe une application analogue :*

$$\phi_B^b : \widetilde{\mathcal{M}}_{j_1}(B, \sigma_B, J_B) \longrightarrow \widetilde{\mathcal{M}}_{0,1}^b(B, \sigma, J_B),$$

*et nous avons*

$$\phi_B^b = \pi \circ \phi_P^b.$$

**Preuve:** Le but est ici de construire une application canonique

$$\overline{\phi}_P^b : \widetilde{\mathcal{M}}_{j_1}(P, \sigma, J_P) \longrightarrow \mathcal{G},$$

telle que

$$u \circ (\overline{\phi}_P^b(u)) \in \widetilde{\mathcal{M}}_{0,1}^b(P, \sigma).$$

Dans ce cas, l'application $\phi_P^b$ est simplement donnée par :

$$\phi_P^b : \widetilde{\mathcal{M}}_{j_1}(P, \sigma) \longrightarrow \widetilde{\mathcal{M}}_{0,1}^b(P, \sigma), \quad u \mapsto u \circ (\overline{\phi}_P^b(u)).$$

Si $\sigma_B \neq 0$, par définition, une courbe $u$ est balancée ssi $\pi(u)$ est balancée, de sorte qu'il suffit de construire une application

$$\overline{\phi}_B^b : \widetilde{\mathcal{M}}_{j_1}(B,\sigma) \longrightarrow \mathcal{G},$$

comme décrit ci-dessus, et dans ce cas nous obtenons automatiquement que $\overline{\phi}_P^b = \overline{\phi}_B^b$ étant donné que $\|du^h\|^2 = \|d\pi(u)\|^2$. La dernière affirmation en découle directement.

La construction des-dites applications vers $\mathcal{G}$ résulte d'une construction tout à fait générale que nous décrivons à présent. Soit $u$ une application holomorphe dans une variété symplectique $M$ et soit $C$ le centre d'énergie de $u$ (penser à $C^v(u)$ si $\sigma_B = 0$, et à $C^B(\pi(u))$ dans le cas contraire). Notons $B_r(C) \subset \mathbb{C}$ la boule de centre $C$ et de rayon $r$. Considérons la fonction lisse :

$$\widetilde{E} : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+, \quad \widetilde{E}(r) := E(u(z - C(u)), B_r(C)),$$

où $E(u(z-C(u)), B_r(C))$ désigne simplement l'énergie de $u(z-C)$ dans la boule $B_r(C)$. Cette fonction est strictement croissante, sa dérivée étant donnée par :

$$\frac{d}{dr}\widetilde{E}(r) = r\int_0^{2\pi} |du(re^{i\theta})|d\theta > 0,$$

et elle s'étend en une fonction continue sur $\mathbb{R}$ qui converge vers 0 lorsque $r \to 0$. Nous obtenons par conséquent qu'il existe un unique rayon noté $m(u) \equiv m$ tel que

$$\widetilde{E}(m(u)) = \hbar.$$

Par invariance conforme de l'énergie nous avons aussi que

$$E(u(m(z-C)), B_1(C)) = E(u(z-C), B_m(C)) = \hbar.$$

L'application est alors obtenue en translatant par le centre d'énergie de $u$ et en multipliant par $m(u)$, i.e :

$$\overline{\phi}^b(u) = (C(u), m(u)).$$

□

Cette fois-ci, remarquons que si nous avions voulu définir la notion de courbe balancée dans $P$ comme étant à la fois horizontalement et verticalement balancée, le lemme ci-dessus ne s'applique plus comme le montre l'exemple suivant, qui n'est qu'une variation des exemples précédents.

**Exemple 5.4.3.** *Considérons $P$ et $B$ comme dans l'exemple précédent, et cette fois-ci considérons l'application $u(z) = (z, az)$, où $a \in \mathbb{R}^+$, avec $a \neq 1$. Alors $u$ a pour centre d'énergie 0, et est horizontalement balancée, mais pas verticalement et dans ce cas, nous avons que*

$$E(u, B_1(0)) = E_B(u_B, B_1(0)) + E^{vert}(u, B_1(0)) = \hbar^h + \pi\left(1 - \frac{1}{1+a^2}\right),$$

*qui vaut $\hbar$ si et seulement si $a = 1$.*

Toute courbe holomorphe balancée possède un groupe à un paramètre d'automorphisme identifié à $S^1$. Ici $S^1$ agit sur $\mathbb{C}$ par rotations autour de l'origine (centre d'énergie). L'application $\phi_P^b$ (et respectivement $\phi_B^b$), envoie une orbite de $\mathcal{G}$ sur une orbite de $S^1$ ci-dessus. En effet, supposons sans perte de généralité que $u$ est balancée, et soit $g \in \mathcal{G}$. Alors pour que $g.u$ soit balancée il faut et il suffit que

$$g^{-1}\widetilde{\phi}_P^b(g.u) = e^{i\theta},$$

pour un certain $\theta \in [0, 2\pi]$. Nous pouvons donc conclure que :

$$\mathcal{M}_{0,1}(P, \sigma) \cong \frac{\widetilde{\mathcal{M}}_{0,1}^b(P, \sigma)}{S^1}.$$

**Cas** $l = 2$. Ce cas est similaire au précédent. Ici $\mathcal{M}_{0,2} = \{\mathbf{j}_2\} = (S^2, \infty, 0)$, et le groupe d'automorphisme de $\mathbf{j}_2$ est donné par

$$\mathrm{Aut}(\mathbf{j}_2) = \mathbf{mul} = \mathbb{C}^*.$$

Nous définissons comme dans le cas précédent :

**Définition 5.4.5.** *Une application $J_B$-holomorphe non-constante $u_B \in \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathbf{j}_2}(B, \sigma_B)$ est dite balancée si :*

$$E_B(u_B, B_1(0)) = \hbar^h. \tag{5.4.7}$$

*Nous dénoterons par $\widetilde{\mathcal{M}}_{0,2}^b(B, \sigma_B)$ l'ensemble de toutes les applications $J_P$-holomorphes balancées avec deux points marqués.*

Nous posons :

**Définition 5.4.6.** *Soit une courbe $J_P$-holomorphe $u \in \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathbf{j}_2}(P,\sigma) = \widetilde{\mathcal{M}}_{0,2}(P,\sigma)$ avec $\sigma \neq 0$.*

- *Si $\pi_*\sigma \neq 0$, on dira que $u$ est balancée si elle est* ***horizontalement balancée,*** *i.e si*

$$E_B(\pi(u), B_1(0)) = \hbar^h. \tag{5.4.8}$$

*Nous dénoterons par $\widetilde{\mathcal{M}}^{b,h}_{0,2}(P,\sigma)$ l'ensemble de toutes les applications $J_P$-holomorphes horizontalement balancées avec deux points marqués.*

- *Si $\pi_*\sigma = 0$, autrement dit $u$ est contenue dans une fibre de $\pi$, on dira que $u$ est* ***balancée*** *si elle est* ***verticalement balancée,*** *i.e si*

$$E^{vert}(u, B_1(0)) = \hbar^v. \tag{5.4.9}$$

*Nous dénoterons par $\widetilde{\mathcal{M}}^{b,v}_{0,2}(P,\sigma)$ l'ensemble de toutes les applications $J_P$-holomorphes verticalement balancées avec deux points marqués.*

Encore une fois, pour homogénéiser les notations on dénotera par $\widetilde{\mathcal{M}}^{b}_{0,2}(P,\sigma)$ l'espace de toutes les courbes balancées avec deux points marqués. Comme précédemment nous avons que :

$$\mathcal{M}_{0,2}(P,\sigma) \cong \frac{\widetilde{\mathcal{M}}^{b}_{0,2}(P,\sigma)}{S^1}.$$

**Applications stables balancées.** Soit $(\mathbf{u},\mathbf{y},\mathbf{x}) \equiv (\mathbf{u},\mathbf{j}) \in \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{S}_P}(P)$. On considère l'application balancée sous-jacente. Précisément, supposons que $\mathcal{S}_P = (T, D, \vec{\sigma})$ est indicé par $I$, et soient $I^v$ et $I^h$ les sous-ensembles de $I$ indiçant respectivement les composantes de fibre et les composantes principales. Posons aussi $\vec{\sigma} \equiv \{\sigma_i\}_{i\in I}$. Si le domaine (dans la normalisation) de la $i$-ème composante de $(\mathbf{u},\mathbf{j})$ n'est pas stable nous remplaçons alors l'application correspondante $u_i$ par l'application balancée associée $\phi^b_P(u_i)$. En vue des définitions données nous avons deux possibilités :

- Soit $i \in I^v$ alors $\phi^b_P(u_i)$ est verticalement balancée ;
- Soit $i \in I^h$ alors $\phi^b_P(u_i)$ est horizontalement balancée.

Nous explicitons la construction ci-dessus. Posons

$$\mathbf{j} := \{\mathbf{j}_i\}_{i\in I}/\sim := \bigsqcup_{i\in I} (\Sigma_i, \{y_{ij}\}_{iEj}, \{x_m\}_{m\in D^{-1}(i)})/_{y_{ij}\sim y_{ji}},$$

et définissons alors

$$I^u := \{i \in I \mid \mathrm{j}_i \text{ est instable}\},$$

et $I^s$ comme étant le complémentaire de $I^u$ dans $I$. Rappelons que $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{S}_P}(P, J_P)$ est la sous-variété de

$$\prod_{i\in I} \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathrm{j}_i}(P,\sigma_i) = \prod_{i\in I^s} \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathrm{j}_i}(P,\sigma_i) \times \prod_{i\in I^u\cap I^h} \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathrm{j}_i}(P,\sigma_i) \times \prod_{i\in I^u\cap I^v} \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathrm{j}_i}(P,\sigma_i),$$

satisfaisant les relations d'incidences appropriées. Donc dans cette notation, l'application $\phi_P^b$ induit une application notée de la même manière :

$$\begin{array}{rcl} \phi_P^b : \prod_{i\in I} \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathrm{j}_i}(P,\sigma_i) & \longrightarrow & \prod_{i\in I^s} \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathrm{j}_i}(P,\sigma_i) \times \prod_{i\in I^u\cap I^h} \widetilde{\mathcal{M}}^{b,h}_{\mathrm{j}_i}(P,\sigma_i) \times \prod_{i\in I^u\cap I^v} \widetilde{\mathcal{M}}^{b,v}_{\mathrm{j}_i}(P,\sigma_i) \\ \{u_i\} & \mapsto & (\{u_i\}_{i\in I^s}, \{\phi_P^b(u_i)\}_{i\in I^u\cap I^h}, \{\phi_P^b(u_i)\}_{i\in I^u\cap I^v}) \end{array}$$

**Définition 5.4.7.** *On pose*

$$\widetilde{\mathcal{M}}^b_{\mathcal{S}_P}(P, J_P) := Im(\phi_P^b|_{\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{S}_P}(P)}).$$

*Cet ensemble est appelé espace de modules des applications $J_P$-holomorphes balancées pour la strate $\mathcal{S}_P$.*

Sur cet espace d'applications balancées, l'action du groupe des reparamétrisations, se réduit à celle de $(S^1)^{I^u}$ combinée avec l'action de $\mathrm{Aut}(\mathcal{S}_P)$. Remarquons que $\mathrm{Aut}(\mathrm{j})$ fibre au-dessus de $\mathrm{Aut}(\mathcal{S}_P)$ qui est fini, de sorte que le groupe agissant est en réalité le groupe produit $(S^1)^{I^u} \times \mathrm{Aut}(\mathcal{S}_P)$ et nous avons

$$\mathcal{M}_{\mathcal{S}_P}(P) = \frac{\widetilde{\mathcal{M}}^b_{\mathcal{S}_P}(P)}{(S^1)^{I^u} \times \mathrm{Aut}(\mathcal{S}_P)}.$$

En désignant par $\mathcal{S}_B = (T_B, D_B, \vec{\sigma_B})$ la projection de $\mathcal{S}_P$ via $\mathcal{F}_\pi$ nous pouvons définir similairement l'espace :

$$\widetilde{\mathcal{M}}^b_{\mathcal{S}_B}(B),$$

et par la discussion ci-dessus nous avons que :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{S}_B}(B) = \frac{\widetilde{\mathcal{M}}^b_{\mathcal{S}_B}(B)}{(S^1)^{I^u\cap I^h} \times \mathrm{Aut}(\mathcal{S}_P)}.$$

**Remarque 5.4.7.** *Afin de simplifier les notations nous poserons :*

$$Aut_{red,P} := (S^1)^{I^u} \times Aut(\mathcal{S}_P) \quad et \quad Aut_{red,B} := (S^1)^{I^u\cap I^h} \times Aut(\mathcal{S}_B). \tag{5.4.10}$$

Il suit du lemme 5.4.7 que $\mathcal{F}_\pi$ induit naturellement une application :

$$\mathcal{F}_\pi : \widetilde{\mathcal{M}}^b_{\mathcal{S}_P}(P) \longrightarrow \widetilde{\mathcal{M}}^b_{\mathcal{S}_B}(B), \tag{5.4.11}$$

qui est équivariante par rapport à l'action de $(S^1)^{I^u}$ et $\mathrm{Aut}(\mathcal{S}_P)$. Après avoir effectué le quotient par l'action des automorphismes restants on retrouve l'application

$$\mathcal{F}_\pi : \mathcal{M}_{\mathcal{S}_P}(P) \longrightarrow \mathcal{M}_{\mathcal{S}_B}(B).$$

**Remarque 5.4.8.** *Si à la place de $\mathcal{F}_\pi$ nous utilisons $\pi$, nous obtenons en réalité un sous-espace de*

$$\prod_{i\in I^s} \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathrm{j}_i}(B,\sigma_{B,i}) \times \prod_{i\in I^u\cap I^h} \widetilde{\mathcal{M}}^b_{\mathrm{j}_i}(B,\sigma_{B,i}) \times \prod_{i\in I^u\cap I^v} B.$$

*Ce sous-espace est balancé à stabilisation près. En désignant par $\mathcal{S}^u_B$ la projection de $\mathcal{S}_P$ par $\pi$, nous dénoterons ce sous-espace par $\widetilde{\mathcal{M}}^b_{\mathcal{S}^u_B}(B)$. Il est à noté que les domaines des composantes instables héritent de la paramétrisation naturelle des applications balancées verticalement sous-jacentes.*

### 5.4.4. Applications de recollement et applications balancées

Pour commencer, nous allons rappeler la construction des applications de gluing dans le cas instable, telle que donnée dans [3]. Soit $\mathcal{S}_B$ une donnée de strate stable, et soit $\mathcal{S}^u := \mathcal{F}_{map}(\mathcal{S}_B)$. Considérons $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{S}^u}$ l'ensemble des courbes nodales paramétrées, ayant $\mathcal{S}^u$ comme représentation en terme d'arbre et soit $\widetilde{\mathcal{L}}_{\mathcal{S}^u}$ le fibré des paramètres de gluing au-dessus de $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{S}^u}$. Considérons le fibré des paramètres de gluing au-dessus de $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{S}_B}(B)$ comme défini précédemment :

$$\widetilde{\mathcal{L}}_{\mathcal{S}_B} := \mathcal{F}^*_{map}\widetilde{\mathcal{L}}_{\mathcal{S}^u} \longrightarrow \mathcal{M}_{\mathcal{S}_B}(B).$$

On va considérer en particulier la restriction :

$$\widetilde{\mathcal{L}}_{\mathcal{S}_B}\Big|_{\widetilde{\mathcal{M}}^b_{\mathcal{S}_B}(B)},$$

de ce fibré à l'espace des applications balancées pour la strate $\mathcal{S}_B$, que nous avons défini dans la section précédente. Posons

$$\widetilde{\mathcal{M}}^b_{\mathcal{S}^u} := \mathcal{F}_{map}(\widetilde{\mathcal{M}}^b_{\mathcal{S}_B}(B)).$$

**Remarque 5.4.9.** *Localement, le fibré des paramètres de recollement au-dessus des applications balancées est donné par :*

$$\widetilde{\mathcal{M}}^b_{\mathcal{S}_B}(B)\Big|_{V_{\mathbf{j}}} \times \mathbb{C}_{\mathbf{j}},$$

*où* $V_{\mathbf{j}} \subset \widetilde{\mathcal{M}}^b_{\mathcal{S}^u}$ *est un voisinage* $Aut_{red,B} = (S^1)^{|I^u_B|} \times Aut(\mathcal{S}^u)$ *invariant autour du point* $\mathbf{j} \in \widetilde{\mathcal{M}}^b_{\mathcal{S}^u}$ *qui est assez petit. En particulier, ce voisinage se projette sur un voisinage* $V^u_{\mathbf{j}} \subset \mathcal{M}_{\mathcal{S}}$.

Notons à présent que $\mathrm{Aut}_{red,B}$ agit naturellement sur $\mathbb{C}_{\mathbf{j}}$, où l'action y est donnée par rotation : supposons pour plus de simplicité que $\mathrm{Aut}(\mathcal{S}_B) = id$, et dénotons par $S^1_i$ le groupe d'automorphismes provenant de la composante, notée $\Sigma_i$, de $\mathbf{j}' \in V_{\mathbf{j}}$ indicée par $i \in I^u_B$. Si $y_{ij}$ sont les points nodaux sur $\Sigma_i$, qui sont au maximum au nombre de deux, alors :

$$S^1_i \times T_{y_{ij}}\Sigma_i \longrightarrow T_{y_{ij}}\Sigma_i, \quad (e^{i\theta}, v) \mapsto e^{i\theta}v,$$

par définition de l'action de $S^1_i$ sur $\Sigma_i$, et par conséquent, $S^1_i$ agit naturellement par rotation sur

$$\mathbb{C}_{i,j} = T_{y_{ij}}\Sigma_i \otimes T_{y_{ji}}\Sigma_j \cong \mathbb{C}.$$

Nous avons donc une action de $\mathrm{Aut}_{red,B}$ sur $\widetilde{\mathcal{L}}_{\mathcal{S}_B}\Big|_{\widetilde{\mathcal{M}}^b_{\mathcal{S}_B}(B)}$. Par l'hypothèse (5.0.4), nous avons que pour tout élément de $\widetilde{\mathcal{M}}^b_{\mathcal{S}_B}(B)$, la linéarisation de l'opérateur de Cauchy-Riemann est surjective. Il s'ensuit que pour un ouvert propre $U_B \subset \widetilde{\mathcal{M}}^b_{\mathcal{S}_B}(B)$ que nous pouvons choisir $\mathrm{Aut}_{red,B}$ invariant, il existe $\epsilon_B$ et une application de recollement :

$$\widetilde{Gl}^b_{\mathcal{S}_B} : \widetilde{\mathcal{L}}^*_{\mathcal{S}_B,\epsilon_B}\Big|_{U_B} \longrightarrow \widetilde{\mathcal{M}}_{0,l}(B, \sigma_B),$$

et de surcroît le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
\widetilde{\mathcal{L}}^*_{\mathcal{S}_B,\epsilon_B}\Big|_{U} & \xrightarrow{\widetilde{Gl}^b_{\mathcal{S}_B}} & \widetilde{\mathcal{M}}_{0,l}(B, \sigma_B) \\
\Big\downarrow \mathcal{F}_{map} & & \Big\downarrow \mathcal{F}_{map} \\
\widetilde{\mathcal{L}}^*_{\mathcal{S}^u,\epsilon}\Big|_{\mathcal{F}_{map}(U_B)} & \xrightarrow{\widetilde{gl}_{\mathcal{S}^u}} & \widetilde{\mathcal{M}}_{0,l}
\end{array}$$

Cette application est $\mathrm{Aut}_{red,B}$ équivariante, et nous pouvons ainsi considérer ce recollement au niveau du quotient :

$$Gl^b_{\mathcal{S}_B} : \frac{\widetilde{\mathcal{L}}^*_{\mathcal{S}_B,\epsilon_B}\Big|_{U_B}}{\mathrm{Aut}_{red,B}} \longrightarrow \widetilde{\mathcal{M}}_{0,l}(B,\sigma_B).$$

La même construction en remplaçant $B$ par $P$ nous donne une application :

$$Gl^b_{\mathcal{S}_P} : \frac{\widetilde{\mathcal{L}}^*_{\mathcal{S}_P,\epsilon_P}\Big|_{U_P}}{\mathrm{Aut}_{red,P}} \longrightarrow \widetilde{\mathcal{M}}_{0,l}(P,\sigma),$$

où $\mathcal{S}_P$ désigne une donnée de strate stable.

**Théorème 5.4.8.** *(B. Chen, A-M. Li) L'application $Gl^b_{\mathcal{S}_B}$ (resp. $Gl^b_{\mathcal{S}_P}$) est un difféomorphisme local.*

Nous allons donner une idée de la preuve de ce théorème dans ce qui suit. Soulignons avant tout deux éléments concernant les applications de recollement définies ci-dessus :

- Notons que si $l \geq 3$, nous pouvons remplacer $\widetilde{\mathcal{M}}_{0,l}(B,\sigma_B)$ (resp. $\widetilde{\mathcal{M}}_{0,l}(P,\sigma)$) par $\mathcal{M}_{0,l}(B,\sigma_B)$ (resp. $\mathcal{M}_{0,l}(P,\sigma)$). En revanche, si $l < 3$, nous devons faire attention lorsque nous voulons quotienter par les automorphismes de $S^2$ préservant moins de 3 points, étant donné que ceux-ci apparaissent en familles non-compactes. Il faut en particulier s'assurer que l'image du recollement nous donne une slice pour l'action de ces automorphismes, auquel cas, toute ambiguité concernant le quotient disparait.
- L'application $Gl^b_{\mathcal{S}_B}$ (resp. $Gl^b_{\mathcal{S}_P}$) est un difféomorphisme local au niveau des applications paramétrées. Le but est donc de montrer que cette propriété demeure vraie après passage au quotient.

Pour la preuve nous allons considérer séparémment les différentes situations qui apparaissent. Aussi, nous n'exposerons que le cas où nous n'avons qu'un seul point nodal, la construction dans le cas général étant une combinaison de ces cas particuliers.

**Preuve:** Soit

$$\Sigma := (S^2_1 \cup S^2_2, y_{12}, y_{21}, x_1, ..., x_l),$$

le domaine d'une application stable avec un point nodal, et considérons sa normalisation :

$$\Sigma_1 \cup \Sigma_2 := (S_1^2, y_{12}, \{x_k\}_{\{k\in D^{-1}(1)\}}) \cup (S_2^2, y_{21}, \{x_k\}_{\{k\in D^{-1}(2)\}}),$$

où $D \equiv D_B : \{1, ..., l\} \longrightarrow \{1, 2\}$ (resp. $D_P$) la fonction d'assignation des points marqués dans $\mathcal{S}_B$. Nous listons désormais les cas qui nous intéressent :

1) $\Sigma_1$ est stable et $\Sigma_2$ est instable avec $|D^{-1}(1)| \geq 3$ et $|D^{-1}(2)| \leq 1$.

2) $\Sigma_1$ est stable et $\Sigma_2$ est instable avec $|D^{-1}(1)| \leq 2$ et $|D^{-1}(2)| = 1$.

3) $\Sigma_1$ est stable et $\Sigma_2$ est instable avec $|D^{-1}(1)| \leq 2$ et $|D^{-1}(2)| = 0$.

4) $\Sigma_1$ est instable et $\Sigma_2$ est instable.

En réalité, tous les cas découlent des deux suivants :

a) Le cas 1) ci-dessus avec $|D^{-1}(2)| = 0$.

b) Le cas 4) ci-dessus avec $|D^{-1}(1)| = 0$ et $|D^{-1}(2)| = 0$.

Nous traitons à présent les cas a) et b). Notons qu'il suffit de travailler localement ce que nous allons faire.

**Le cas a)**. Dans ce cas, on peut sans perte de généralité, fixer

$$\Sigma_2 = (S_2^2, \infty),$$

c'est à dire fixer le point $y_{21}$ comme étant $\infty$. Le groupe $\mathrm{Aut}_{red,B}$, quant à lui, se réduit à $S^1$ et l'application de recollement est ainsi donnée localement (cf 5.4.9) par :

$$Gl_{\mathcal{S}_B}^b : \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{S}_B}^b(B)\Big|_{V_{\mathrm{j}_0}} \times_{S^1} \mathbb{C}_{\mathrm{j}_0}^* \longrightarrow \mathcal{M}_{0,l}(B, \sigma_B),$$

où $\mathrm{j}_0$ est la surface décrite par $\Sigma$ plus haut. Soit $u_0 = (u_1, u_2)$ un élément de

$$\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{S}_B\,\mathrm{j}_0}^b(B) := \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{S}_B}^b(B) \cap \mathcal{F}_{map}^{-1}(\mathrm{j}_0).$$

Notons que $\widetilde{\mathcal{M}}^b_{\mathcal{S}_B,\mathrm{j}_0}(B)$ est une variété lisse par (5.0.4). Considérons une slice $N_{u_0}$ pour l'action de $S^1$ passant par $u_0$. Alors cette slice peut s'exprimer comme

$$N_{u_0,\mathrm{j}_0} \times \mathcal{F}_{par}(V_{\mathrm{j}_0}),$$

où $N_{u_0,\mathrm{j}_0}$ est une slice de $\widetilde{\mathcal{M}}^b_{\mathcal{S}_B,\mathrm{j}_0}(B)$ autour de $u_0$, qui peut être vue comme l'intersection de ce dernier espace de modules avec $N_{u_0}$. Posons à présent

$$V'_{\mathrm{j}_0} := \mathcal{F}_{par}(V_{\mathrm{j}_0}) \subset \mathcal{M}_{\mathcal{S}}.$$

Remarquons que $V'_{\mathrm{j}_0}$ est paramétré par des voisinages de $x_4, ...., x_l \in \Sigma_1$, ainsi que par un voisinage de $y_{12}$, lequel sera désigné par $V_{y_{12}}$, de sorte que si nous oublions les voisinages des points marqués pour simplifier, nous avons $V'_{\mathrm{j}_0} = V_{y_{12}}$. Nous concluons donc qu'un voisinage de $[u_0, \mathrm{j}_0] \in \mathcal{M}_{\mathcal{S}_B}(B)$ peut s'exprimer comme le produit :

$$N_{u_0,\mathrm{j}_0} \times V_{y_{12}},$$

et si on fixe un paramètre de recollement $\rho_0$ et un voisinage de ce dernier, $V_{\rho_0} \in \mathbb{C}^*_{\mathrm{j}_0}$ tel que $|\rho_0| < \epsilon_B$, le recollement s'exprime localement de la façon suivante :

$$Gl^b_{\mathcal{S}_B} : N_{u_0\mathrm{j}_0} \times V_{y_{12}} \times V_{\rho_0} \longrightarrow \mathcal{M}_{0,l}(B).$$

Observons que la surface obtenue via ce processus :

$$gl_{\mathcal{S}^u}(\mathrm{j}_0, y, \rho),$$

ne dépend que de $\mathrm{j}_0$ (rappelons que en vue de simplifier l'argument, nous avons fixé les points marqués sur $\Sigma_1$), tel que nous assure la théorie de Weil-Petersson sur les espaces de Teichmüller. Cette surface est précisément donnée par $\Sigma_1$. Désormais nous désignerons cette surface par $\mathrm{j}_1$ et nous pouvons réécrire l'application ci-dessus comme suit :

$$Gl^b_{\mathcal{S}_B} : N_{u_0\mathrm{j}_0} \times V_{y_{12}} \times V_{\rho_0} \longrightarrow \mathcal{M}_{\mathrm{j}_1}(B).$$

Le but à présent est de comparer cette application avec une autre que nous avons déjà rencontrée. Pour ce faire, nous stabilisons la surface $\Sigma$ en ajoutant deux points marqués $\{w_0, w_1\}$, à $\Sigma_2$. Cet ajout permet de fixer la paramétrisation de $\Sigma_2 \cup \{w_0, w_1\}$ à

$$(S_2^2, 0, 1, \infty),$$

simplement en reparamétrant via l'unique élément $(t, m) \in \mathcal{G}$ qui envoie 0 sur $w_0$ et 1 sur $w_1$, ce qui est équivalent à demander que :

$$-mt = w_0 \quad \text{et} \quad m = w_1 - w_0. \tag{5.4.12}$$

Posons ainsi

$$\bar{\mathrm{j}}_0 = \Sigma_1 \cup (S_2^2, 0, 1, \infty).$$

Soit $\mathcal{S}_B(2)$ la donnée de strate correspondant à cet ajout. L'application $u_0$ est naturellement vue comme un élément de $\mathcal{M}_{\mathcal{S}_B(2)}(B)$, ayant pour domaine $\bar{\mathrm{j}}_0$, et localement autour de $(u_0, \bar{\mathrm{j}}_0)$ ce dernier espace de modules, qui est une variété par l'hypothèse (5.0.4), prend la forme :

$$V_{y_{12}} \times \overline{N}_{u_0},$$

où $\overline{N}_{u_0}$ est un voisinage de $u_0$ dans $\mathcal{M}_{\bar{\mathrm{j}}_0}(B)$. Dans cette expression, nous avons encore une fois fixé les points marqués $x_4, ..., x_l \in \Sigma_1$. Notons que $\overline{N}_{u_0}$ peut être pour sa part choisi comme étant :

$$\mathcal{G}_0.N_{u_0, \mathrm{j}_0},$$

où $\mathcal{G}_0$ désigne un voisinage de l'identité, ie $(0, 1)$, dans $\mathcal{G}$.

Possiblement, en choisissant $\rho_0$ de rayon plus petit, en fixant $y \in V_{y_{12}}$ à $y_{12}$, nous avons une application de recollement :

$$Gl_{\mathcal{S}_B(2), y_{12}, \rho_0} : \overline{N}_{u_0} \times \{\rho_0\} \longrightarrow \mathcal{M}_{\bar{\mathrm{j}}}(B, \sigma_B) \subset \mathcal{M}_{0,l+2}(B, \sigma_B),$$

où $\bar{\mathrm{j}}$ désigne le recollement de $\bar{\mathrm{j}}_0$ pour le paramètre $\rho_0$. Cette application est un difféomorphisme comme montré dans le cas stable. De surcroît, étant donné que nous avons fixé $\rho_0$ ainsi que $y_{12}$, l'image dans le recollement de $\bar{\mathrm{j}}_0$ des nouveaux points marqués, $\{0, 1\} \in \Sigma_2$, est fixée. Afin de mettre l'accent sur le fait que ces deux points sont fixés par le recollement, nous remplaçons $\bar{\mathrm{j}}$ par $\bar{\mathrm{j}}/_2$. Ainsi, l'application qui consiste à oublier ces deux points induit une identification entre $\mathrm{j}_1$ et $\bar{\mathrm{j}}/_2$, et par là même un isomorphisme :

$$\mathcal{M}_{\bar{\mathrm{j}}/_2}(B,\sigma_B) \cong \mathcal{M}_{\mathrm{j}_1}(B,\sigma_B).$$

En utilisant cette identification nous pouvons écrire :

$$Gl_{\mathcal{S}_B(2),y_{12},\rho_0} : \overline{N}_{u_0} \times \{\rho_0\} \longrightarrow \mathcal{M}_{\mathrm{j}_1}(B,\sigma_B).$$

Dès lors, afin de pouvoir comparer cette application à $Gl^b_{\mathcal{S}_B}$ définie auparavant, il nous suffit de trouver une identification naturelle :

$$\overline{G} : N_{u_0,\mathrm{j}_0} \times V_{y_{12}} \times V_{\rho_0} \longrightarrow \overline{N}_{u_0} = \mathcal{G}_0.N_{u_0,\mathrm{j}_0}.$$

Il suffit donc en particulier de trouver un isomorphisme noté $G$, entre $V_{y_{12}} \times V_{\rho_0}$ et $\mathcal{G}_0$. Cette identification est obtenue en regardant comment le recollement de $\mathrm{j}_0$, pour les paramètres $y_{12} \in V_{y_{12}}$ et $\rho_0 \in V_{\rho_0}$, affecte les points $\{w_0, w_1\} \in \Sigma_2$ qui sont dans $\mathcal{G}_0.\{0,1\}$. Précisément, $y$ est obtenu en considérant l'image de $w_0$ par ce recollement, i.e

$$y - y_{12} = \rho_0 w_0,$$

et $\rho$ est donné en mesurant comment la distance entre $w_0$ et $w_1$ est dilatée par $\rho_0$, autrement dit :

$$\rho := \rho_0(w_1 - w_0).$$

Pour résumer nous posons donc :

$$G(y,\rho) = (\rho_0^{-1}(y - y_{12}), \rho_0^{-1}\rho). \tag{5.4.13}$$

On pose par la suite :

$$\overline{G}(u,y,\rho) = G(y,\rho)u, \tag{5.4.14}$$

et

$$Gl'_{\mathcal{S}_B(2),y_{12},\rho_0} := Gl^b_{\mathcal{S}_B} \circ \overline{G}^{-1}.$$

Si nous avions l'égalité entre cette nouvelle application et $Gl_{\mathcal{S}_B(2),y_{12},\rho_0}$ nous pourrions tout de suite déduire le résultat. Les auteurs dans [3], montrent que même si ces applications ne sont pas les mêmes, elles sont toutefois $C^1$ proches l'une de l'autre pour $\rho_0$ assez petit, ce qui permet de conclure que $Gl'_{\mathcal{S}_B(2),y_{12},\rho_0}$, et par là même $Gl^b_{\mathcal{S}_B}$, sont des difféomorphismes.

**Le cas** b). Dans ce cas, nous avons :

$$\Sigma_1 = (S^2_1, y_{12} = \infty) \quad \text{et} \quad \Sigma_2 = (S^2_2, y_{21} = \infty),$$

et

$$\mathrm{Aut}(\Sigma) = \mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2 = (\mathbf{tr}_1 \ltimes \mathbf{mul}_1) \times (\mathbf{tr}_2 \ltimes \mathbf{mul}_2),$$

où nous avons différencié les groupes d'automorphismes de chacune des composantes via les indices 1, 2, et où nous oublions pour simplifier les automorphismes d'arbre $\mathrm{Aut}(\mathcal{S}_B)$ possibles, afin de simplifier l'exposition. Maintenant, pour simplifier les notations, supposons que la strate donnée par $\mathcal{S}_B$ est compacte. Alors le recollement est donné par :

$$Gl^b_{\mathcal{S}_B} : \widetilde{\mathcal{M}}^b_{\mathcal{S}_B}(B) \times_{S^1 \times S^1} \mathbb{C}^*_{\epsilon_B} \longrightarrow \widetilde{\mathcal{M}}_{0,0}(B, \sigma_B).$$

Rappelons à présent que

$$\mathcal{M}(B, \sigma_B) := \widetilde{\mathcal{M}}_{0,0}(B, \sigma_B)/\mathrm{Aut}(S^2).$$

Afin de montrer que $Gl^b_{\mathcal{S}_B}$ définit bien un difféomorphisme (local) quand on passe au quotient, il nous faut montrer que l'image de $Gl^b_{\mathcal{S}_B}$ représente une slice dans $\widetilde{\mathcal{M}}_{0,0}(B, \sigma_B)$ pour l'action de $\mathrm{Aut}(S^2)$. Pour ce faire, nous allons considérer, comme dans le cas a) en fait, une autre application de recollement qui, elle, localement, définit une telle slice, et qui est ($C^1$) proche de $Gl^b_{\mathcal{S}_B}$.

Le point crucial réside ici en la comparaison (locale) entre les paramétrisations de $\Sigma$, avec celles de $S^2$. Bien entendu, pour ces premières on compte 4 dimensions complexes tandis que $\mathrm{Aut}(S^2)$ ne possède que 3 degrés de liberté. Toutefois, le recollement de $\Sigma$ pour un paramètre $\rho$ donné nous permet de fixer un des degrés de liberté dans $\mathrm{Aut}(\Sigma)$ comme il est expliqué ci-dessous.

Posons :

$$\mathrm{Aut}(\Sigma)_{y_{1,2}} := \{(g_1, g_2) \in \mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2 | dg_1(y_{12}) \otimes dg_2(y_{21}) = 1\}.$$

Donc $\mathrm{Aut}(\Sigma)_{y_{1,2}}$ est un sous-groupe normal de $\mathrm{Aut}(\Sigma)$ que l'on peut identifier à

$$\mathrm{tr}_1 \times \mathrm{tr}_2 \times \mathbb{C}_1^*,$$

où la composante $\mathbb{C}_1^*$ est explicitement donnée par le sous-groupe :

$$\mathbb{C}_1^* := \{(m_1, m_2) \in \mathbf{mul}_1 \times \mathbf{mul}_2 | m_1 m_2 = 1\} \subset \mathbf{mul}_1 \times \mathbf{mul}_2,$$

qui est en l'occurrence obtenu en considérant la préimage de l'élément neutre via l'application :

$$\Delta : \mathbf{mul}_1 \times \mathbf{mul}_2 \longrightarrow \mathbf{mul}, \quad (m_1, m_2) \mapsto m_1 m_2.$$

Nous désignerons par $\mathbb{C}_2^*$ le complémentaire de $\mathbb{C}_1^*$ dans $\mathbf{mul}_1 \times \mathbf{mul}_2$, autrement dit :

$$\mathbb{C}_2^* = \{(m_1, m_2) \in \mathbf{mul}_1 \times \mathbf{mul}_2 | m_1 m_2 = \rho \neq 1\}.$$

Remarquons encore une fois que $\mathrm{Aut}(\Sigma)$ agit sur $\mathbb{C}_{\epsilon_B}^*$, et en l'occurrence $\mathrm{Aut}_{y_{1,2}}(\Sigma)$ est le sous-groupe des automorphismes qui fixe les paramètres de recollement et $\mathbb{C}_2^*$ est par là même identifié naturellement à $\mathbb{C}_{\epsilon_B}^*$.

Soient à présent $(t_i, m_i) \in \mathcal{G}_i$, $i = 1, 2$, des reparamétrisations de $\Sigma_i$, $i = 1, 2$, qui peuvent être comme auparavant associées à des ajouts de deux points marqués $\{w_0^i, w_1^i\}_i$, images de 0 et 1, sur chacune des composantes. Le gluing pour les domaines pour un paramètre $\rho$ donne alors :

$$\Sigma \cup \{w_0^i, w_1^i\}_{i=1,2} \xrightarrow{gl_\rho} \Sigma_\rho \in \mathcal{M}_{0,4}.$$

Le processus de recollement pour $\rho_0$ nous donne :

$$(w_1^1 - w_0^1)(w_1^2 - w_0^2) = m_1 m_2 = \rho,$$

de sorte que l'élément $m_2$ est complétement déterminé par le quadruplet

$$(t_1, m_1, t_2, \rho),$$

et le degré de liberté supplémentaire est ainsi éliminé. Donc pour $\rho$ donné, le fait d'ajouter trois points marqués sur $\Sigma$, déterminés en réalité par un élément de $\mathrm{Aut}_y(\Sigma)$, nous obtenons une unique paramétrisation de $S^2$ via $gl_\rho$ et nous pouvons donc voir $\Sigma_\rho$ comme un élément de $\mathcal{M}_{0,3}$. Cette observation permet en l'occurrence de conclure que, pour $\rho$ assez petit, il est possible d'identifier localement autour de l'identité les groupes $\mathrm{Aut}(S^2)$ et $\mathrm{Aut}_{y_{1,2}}(\Sigma)$ (cf. proposition 12.11 dans [**3**]), ce que l'on peut écrire par :

$$\mathrm{Aut}_{y_{1,2}}(\Sigma)_0 \overset{loc}{\cong} \mathrm{Aut}(S^2)_0.$$

Notons à présent, pour ce qui va suivre, que le choix d'élément dans $\mathrm{Aut}_y(\Sigma)$ revient à considérer les éléments $u_0 = (u_1, u_2)$ de $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{S}_B}(B)$ qui sont tels que $u_1$ est balancée et $u_2$ est seulement centrée. Désignons par $\widetilde{\mathcal{M}}^{b'}_{\mathcal{S}_B}(B)$ l'espace de ces éléments, qui est une variété par (5.0.4). Notons que $S^1_1 \times S^1_2$ agit naturellement sur cet espace (pas $\mathbf{mul}_2$ ! ! !). De la même façon que pour les courbes balancées, nous avons une application :

$$\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{S}_B}(B) \longrightarrow \widetilde{\mathcal{M}}^{b'}_{\mathcal{S}_B}(B) \tag{5.4.15}$$

$$(u_1, u_2) \mapsto (u_1(m(z_1 - t_1)), u_2(z_2 - t_2)), \tag{5.4.16}$$

où $(m, t_1) = \overline{\phi}^b_B(u_1)$, et $t_2$ est le centre d'énergie de $u_2$. Cette application est $\mathrm{Aut}_y(\Sigma)$,$S^1_1 \times S^1_2$ équivariante et nous obtenons l'identification :

$$\frac{\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{S}_B}(B)}{\mathrm{Aut}_y(\Sigma)} = \frac{\widetilde{\mathcal{M}}^{b'}_{\mathcal{S}_B}(B)}{S^1_1 \times S^1_2}.$$

D'autre part, $\mathbb{C}^*_2 \cong \mathbf{mul}_2$ agit de façon évidente sur $\widetilde{\mathcal{M}}^{b'}_{\mathcal{S}_B}(B)$ et l'espace des orbites de cette action :

$$\frac{\widetilde{\mathcal{M}}^{b'}_{\mathcal{S}_B}(B)}{\mathbb{C}^*_2},$$

coïncide avec $\widetilde{\mathcal{M}}^{b}_{\mathcal{S}_B}(B)$.

Soit à présent

$$Gl_{\mathcal{S}_B,1} : \widetilde{\mathcal{M}}^{b'}_{\mathcal{S}_B}(B) \times \{\rho_0\} \longrightarrow \widetilde{\mathcal{M}}_{0,0}(B, \sigma_B),$$

une application de recollement sur $\widetilde{\mathcal{M}}^{b'}_{\mathcal{S}_B}(B)$. Soit à présent $N$ une slice de $\widetilde{\mathcal{M}}^{b}_{\mathcal{S}_B}(B)$ dans $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{S}_B}(B)$. Alors,

$$Gl_{\mathcal{S}_B} : N \times V_{\rho_0} \longrightarrow \widetilde{\mathcal{M}}_{0,0}(B) \quad \text{et} \quad Gl_{\mathcal{S}_B,1} : \mathbb{C}^*_{2,0}N \times \{\rho_0\} \longrightarrow \widetilde{\mathcal{M}}_{0,0}(B, \sigma_B),$$

où $\mathbb{C}^*_{2,0}$ désigne un voisinage de l'identité dans $\mathbb{C}^*_2$. En considérant l'isomorphisme entre $\mathbb{C}^*_{2,0}$ et $V_{\rho_0}$, on peut voir, comme dans le cas a) que $Gl_{\mathcal{S}_B}$ est $C^1$ proche de $Gl_{\mathcal{S}_B,1}$. Il reste alors à montrer que cette dernière application définit bien une slice dans $\widetilde{\mathcal{M}}_{0,0}(B,\sigma_B)$ pour $\mathrm{Aut}(S^2)$.

Pour ce faire, considérons une slice $\widetilde{N}$, cette fois-ci dans $\widetilde{\mathcal{M}}^{b'}_{\mathcal{S}_B}(B)$, relativement à l'action de $S^1_1 \times S^1_2$. Un voisinage de $\widetilde{N}$ dans $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{S}_B}(B)$ est donné par

$$\mathrm{Aut}_y(\Sigma)_0.\widetilde{N}.$$

Définissons :

$$Gl_{\mathcal{S}_B,2} : \mathrm{Aut}_y(\Sigma)_0.\widetilde{N}\times\{\rho_0\} \longrightarrow \widetilde{\mathcal{M}}_{0,0}(B), \quad ((t_1,m,t_2),u) \mapsto gl_{\rho_0}(t_1,m,t_2).\widetilde{Gl}_{\mathcal{S}_B}(u), \tag{5.4.17}$$

où, d'une part, $gl_{\rho_0}(t_1,m,t_2)$ désigne ici l'identification locale entre $\mathrm{Aut}_y(\Sigma)_0$ et $\mathrm{Aut}(S^2)$ vue plus haut, et d'autre part $\widetilde{Gl}_{\mathcal{S}_B}$ est l'application de recollement sur les applications paramétrées dans $\mathrm{Aut}_y(\Sigma)_0.\widetilde{N}$, qui étend $Gl_{\mathcal{S}_B,1}$, i.e

$$\widetilde{Gl}_{\mathcal{S}_B} : \mathrm{Aut}_y(\Sigma)_0.\widetilde{N} \longrightarrow \widetilde{\mathcal{M}}_{0,0}(B).$$

Cette dernière application est un difféomorphisme et possiblement en réduisant $\rho_0$ afin de contrôler l'action de $gl_{\rho_0}$, nous avons que $\widetilde{Gl}_{\mathcal{S}_B}$ et $Gl_{\mathcal{S}_B,2}$ sont proches et par conséquent $Gl_{\mathcal{S}_B,2}$ l'est aussi. L'image de $id.\widetilde{N}$ par $Gl_{\mathcal{S}_B,2}$ nous fournit ainsi une slice, or on remarque que par définition :

$$Gl_{\mathcal{S}_B,2}(id.\widetilde{N}) \cong \widetilde{Gl}_{\mathcal{S}_B}(id.\widetilde{N}) = Gl_{\mathcal{S}_B,1}(\widetilde{N}),$$

et nous obtenons ainsi le résultat escompté.

□

**Remarque 5.4.10.** 1) *La preuve ci-dessus résulte de l'observation suivante dans le cas* b), *et d'une similaire pour le cas* a). *L'application* $Gl^b_{\mathcal{S}_B}$ *découle plus généralement d'une application de recollement définie sur* $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{S}_B}(B)$ *et qui s'exprime localement par :*

$$\widetilde{Gl}_{\mathcal{S}_B} : U_{u_0} \times V_{\rho_0} \longrightarrow \widetilde{\mathcal{M}}_{0,0}(B,\sigma_B),$$

*où* $U_{u_0}$ *désigne un voisinage* $\mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2$ *invariant d'un point* $u_0 \in \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{S}_B}(B)$ *et* $V_{\rho_0}$ *est un voisinage autour de* $\rho_0 \in \mathbb{C}^*_{\epsilon_B}$. *En particulier* $Gl^B_{\mathcal{S}_B}$ *est obtenue en choisissant une slice appropriée pour l'action de* $Aut(\Sigma)$, *qui nous est donnée* *par la restriction aux espaces d'applications balancées. En effectuant le quotient par le groupe d'automorphismes nous obtenons une application :*

$$\widetilde{Gl}_{\mathcal{S}_B} : \frac{U_{u_0} \times V_{\rho_0}}{\mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2} \longrightarrow \frac{\widetilde{\mathcal{M}}_{0,0}(B, \sigma_B)}{Aut(S^2)},$$

*que nous aimerions être en réalité à valeur dans* $\widetilde{\mathcal{M}}_{0,0}(B, \sigma_B)/Aut(S^2)$. *Notons que le membre de gauche est donné par*

$$\frac{U_{u_0}}{Aut_{y_{1,2}}(\Sigma)} \times \{\rho_0\},$$

*par l'identification de* $V_{\rho_0}$ *avec un voisinage de l'identité dans* $\mathbb{C}_2^*$, *ce qui nous donne ainsi une nouvelle application*

$$\widetilde{Gl}_{\mathcal{S}_B,1} : \frac{U_{u_0}}{Aut_{y_{1,2}}(\Sigma)} \times \{\rho_0\} \longrightarrow \frac{\widetilde{\mathcal{M}}_{0,0}(B, \sigma_B)}{Aut(S^2)},$$

*dont on doit montrer la bonne définition.*

2) *Désormais nous abandonnerons l'indice b qui faisait référence au courbes balancées, i.e le gluing que nous considérerons sera toujours celui des courbes balancées, lorsqu'il y a lieu de les utiliser.*

Pour clôturer cette section, nous discutons de la compatibilité du recollement vis-à-vis de la projection $\pi$. Précisément, nous voudrions avoir l'égalité suivante :

$$\pi \circ Gl_{\mathcal{S}_P} = Gl_{\mathcal{S}_B} \circ \mathcal{F}_\pi, \tag{5.4.18}$$

avec $\mathcal{S}_B = \mathcal{F}_\pi(\mathcal{S}_P)$. Penchons-nous pour commencer sur le cas $B = pt$ qui a été jusqu'à présent notre ligne conductrice. Dans ce cas, $\mathcal{F}_\pi$ coïncide avec $\mathcal{F}_P$ et $\mathcal{S}_B = \mathcal{F}_P(\mathcal{S}_P) = \mathcal{S}$ dans les notations qui précèdent. Posons encore une fois $\mathcal{S}^u = \mathcal{F}_{map}(\mathcal{S}_P)$, et soit $u = \{u_i\}_{i \in I} \in \widetilde{\mathcal{M}}^b_{\mathcal{S}_P}(P)$. Rappelons que dans le Chapitre 4, nous avons séparé les composantes de $u$ qui disparaissent après stabilisation en branches dites libres notées $Br_i$, et en branches dites connectantes notées $C^*_{i,j}$. Nous voulons décrire l'application

$$\mathcal{F}_\pi : \mathcal{L}^*_{\mathcal{S}_P} \longrightarrow \mathcal{L}^*_{\mathcal{S}},$$

induite par $\mathcal{F}_\pi$ sur les fibrés des paramètres de recollement de sorte que nous ayons la commutativité (5.4.18). Cela revient en l'occurrence, à décrire

$$\mathcal{F}_\pi : \mathcal{L}^*_{\mathcal{S}^u} \longrightarrow \mathcal{L}^*_{\mathcal{S}},$$

de sorte que les recollements correspondants pour les surfaces nodales stables ou instables coïncident, et plus précisément sont équivalentes. Explicitement, pour une surface nodale représentant $\mathcal{F}_{map}(\mathcal{S}_P)$,

$$\mathbf{j} := (\cup_{i\in I}\Sigma_i, \{y_{ij}\}_{iEj}, \mathbf{x}),$$

l'ensemble des paramètres de recollement au-dessus de $\mathbf{j}$ sont par définition donnés par

$$\mathbb{C}^*_{\mathbf{j}} = \oplus_{\{iEj|i,j\in I\}}\mathbb{C}_{i,j},$$

et en reprenant les notations du Chapitre 4, la projection induite par la stabilisation est à valeurs dans :

$$\mathbb{C}^*_{\mathcal{F}_\pi(\mathbf{j})} = \oplus_{\{iEj|i,j\in I^h\}}\mathbb{C}^*_{i,j} \oplus_{\{i,j\in I^h|C^*_{i,j}\neq\emptyset\}} T_{c^i_{i,j}}\Sigma_i \otimes T_{c^j_{i,j}}\Sigma_j.$$

Nous devons à présent donner l'application :

$$\mathcal{F}_\pi : \mathbb{C}^*_{\mathbf{j}} \longrightarrow \mathbb{C}^*_{\mathcal{F}_\pi(\mathbf{j})}.$$

On note que les seuls paramètres qui doivent changer viennent des composantes qui disparaissent sous la stabilisation. Il suffit donc de regarder ce qui se passe pour les branches connectantes et les branches libres. Seulement les branches libres disparaissent et ne jouent donc aucun rôle, ce qui se traduit en réalité par le fait que le groupe d'automorphisme d'une branche libre agit de façon transitive sur l'ensemble des paramètres de recollement qui y sont associés. Ainsi, après quotient par ces automorphismes, le recollement $gl_{\mathcal{S}^u}$ sur cette branche est fixé. Il nous reste donc à considérer le cas des branches connectantes. Encore une fois, le groupe des automorphismes d'une telle branche, qui ici est donné par :

$$\mathrm{Aut}(C_{i,j}) = \prod_{k\in C^*_{i,j}} \mathbf{mul},$$

agit sur l'ensemble des paramètres de recollement :

$$\oplus_{\{i,j\in C_{i,j}|iEj\}}\mathbb{C}_{i,j}.$$

La projection de l'espace des orbites de cette action est alors donnée par :

$$\begin{array}{rcl} \pi_{st} : \bigoplus_{\{i,j \in C_{i,j} | iEj\}} \mathbb{C}_{i,j} & \longrightarrow & \dfrac{\bigoplus_{\{i,j \in C_{i,j} | iEj\}} \mathbb{C}_{i,j}}{\mathrm{Aut}(C_{i,j})} = \mathbb{C}^* \cong T_{c^i_{i,j}} \Sigma_i \otimes T_{c^j_{i,j}} \Sigma_j \\ \{\rho_{m,n}\}_{\{m,n \in C_{i,j} | mEn\}} & \mapsto & \prod \rho_{m,n}. \end{array}$$

On pose alors

$$\mathcal{F}_\pi(\{\rho_{m,n}\}) = \prod \rho_{m,n}, \tag{5.4.19}$$

qui est comme on peut le constater, invariante sous l'action des automorphismes. On peut vérifier que

$$gl_{\mathcal{S}^u}(\mathbf{j}, \{\rho_{m,n}\}) = gl_{\mathcal{S}}(\mathcal{F}_\pi(\mathbf{j}), \prod \rho_{m,n}),$$

tel que souhaité.

**Remarque 5.4.11.** *Le point essentiel encore une fois est que nous pouvons, via l'action du groupe des reparamétrisations, fixer une paramétrisation pour* $\mathbf{j}$, *au coût de perdre des degrés de liberté en ce qui concerne le recollement.*

On remplace à présent le cas du point par celui d'une famille de point. La différence repose seulement sur le fait que nous devons nous assurer que les pré-recollement sont définis sur des surfaces qui sont équivalentes.

**Théorème 5.4.9.** *Soit* $\mathcal{S}_P$ *une donnée de strate stable et soit* $\mathcal{S}_B$ *sa projection (stable). Soit* $U_{\mathcal{S}_P}$ *un ouvert propre de* $\mathcal{M}_{\mathcal{S}_P}(P)$ *qui se projette sur un ouvert propre* $U_{\mathcal{S}_B}$ *de* $\mathcal{M}_{\mathcal{S}_B}(B)$. *Soient* $Gl_{\mathcal{S}_P}$ *et* $Gl_{\mathcal{S}_B}$ *les recollements au-dessus de ces ouverts. Alors :*

$$\pi \circ Gl_{\mathcal{S}_P} = Gl_{\mathcal{S}_B} \circ \mathcal{F}_\pi.$$

**Preuve:** Nous désirons montrer la commutativité du diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{L}^*_{\mathcal{S}_P} \arrow[r, "Gl_{\mathcal{S}_P}"] \arrow[d, "\mathcal{F}_\pi"'] & \mathcal{M}_{0,l}(P,\sigma) \arrow[d, "\pi"] \\ \mathcal{L}^*_{\mathcal{S}_B} \arrow[r, "Gl_{\mathcal{S}_B}"] & \mathcal{M}_{0,l}(B,\sigma_B) \end{tikzcd} ,$$

en sachant au préalable que le diagramme qui suit est commutatif, par ce qui a déjà été fait :

$$\begin{tikzcd} \widetilde{\mathcal{L}}^*_{S_P} \arrow[r, "\widetilde{Gl}_{S_P}"] \arrow[d, "\pi"] & \widetilde{\mathcal{M}}_{0,l}(P,\sigma) \arrow[d, "\pi"] \\ \widetilde{\mathcal{L}}^*_{S_B^u} \arrow[r, "\widetilde{Gl}_{S_B^u}"] & \widetilde{\mathcal{M}}_{0,l}(B,\sigma_B) \end{tikzcd} .$$

Considérons à présent $(u,\mathrm{j}) \in \widetilde{\mathcal{M}}^b_{S_P}(P)$, sa projection stable $(u_B, \mathrm{j}_B) := \mathcal{F}_\pi(u,\mathrm{j}) \in \widetilde{\mathcal{M}}^b_{S_B}(B)$, ainsi que sa projection instable $(\pi(u),\mathrm{j}) \in \widetilde{\mathcal{M}}^b_{S_B^u}(B)$. Comme mentionné dans la remarque 5.4.8, la paramétrisation du domaine de cette dernière application provient de la paramétrisation à $S^1$-automorphisme près du domaine de $u$. Rappelons aussi que $\widetilde{Gl}_{S_B^u}$ est par définition équivariante par rapport aux automorphismes des applications balancées. Toutefois, comme $\mathcal{S}_B^u$ n'est pas stable, et il en résulte que ce dernier recollement n'est pas un difféomorphisme local. Le problème vient encore une fois des branches connectantes et des branches libres.

Sans perte de généralité, il nous suffit d'inspecter les cas suivants :

1) le cas où j n'est composée que d'une seule composante principale, $\Sigma_0$ ainsi que d'une seule branche $Br_0$ que l'on ordonne de façon évidente à partir de la composante principale.

2) le cas où j est composée de deux composantes principales $\Sigma_1$, $\Sigma_2$ ainsi que d'une unique branche connectante $C^*_{1,2}$ entre les deux.

Ces cas représentent les situations où $\mathcal{F}_\pi$ ne coïncide clairement pas avec $\pi$ application via laquelle le pré-recollement est défini.

**Cas 1.** Etant donné que $u$ est une application balancée,

$$\mathrm{Aut}(\mathrm{j}) = \prod_{k \in Br_0 \setminus \{0\}} S^1.$$

Considérons à présent $\pi(u)$. En particulier, le recollement de $\pi(u)$ est $\mathrm{Aut}(\mathrm{j})$-équivariant.

A présent, la théorie de Weil-Petersson sur les espaces Teichmüller nous assure que le domaine de $\mathrm{j}_\rho$ est équivalent au domaine de $\mathrm{j}_B$, qui est en l'occurrence $\Sigma_0$ ici, et cela pour tout paramètre $\rho$. Donc à priori les applications $u_B$ et $\widetilde{Gl}_{S_P}(u,\mathrm{j},\rho)$

ont le même domaine. Pour mettre l'accent sur le fait que ce domaine ne dépend pas de $\rho$, nous fixons $\rho$ à $\rho_0$ de rayon très petit. Nous prouvons dans ce qui suit que :

$$\pi(\widetilde{Gl}_{S_P}(u,\mathrm{j},\rho_0)) = (u_B, \mathrm{j}_B).$$

Nous savons déjà que

$$\pi(\widetilde{Gl}_{S_P}(u,\mathrm{j},\rho_0)) = \widetilde{Gl}_{S_B^u}(\pi(u),\mathrm{j},\rho_0).$$

Or par définition le prérecollement de $(\pi(u), \mathbf{j}, \rho_0)$ est une application lisse de domaine $\Sigma_{\rho_0}$ qui coïncide avec $u_0$ partout sauf sur un disque de rayon déterminé par $\rho_0$ sur lequel

$$\pi(u)_{\rho_0}(z) \equiv \mathrm{prgl}_B(\pi(u),\mathrm{j},\rho_0)(z) = \exp_{\pi(p_{0,1})}\left(\beta\left(\frac{z}{\rho_0^{1/4}}\right)\exp^{-1}_{\pi(p_{0,1})}(\pi(u_0(z))\right)$$

où $p_{0,1}$ désigne l'image par $u$ du point nodal entre $\Sigma_0$ et $\Sigma_1$ (rappelons que nous avons ordonné la branche). Posons

$$\xi := \exp^{-1}_{\pi(p_{0,1})}(\pi(u_0(z))).$$

Notons que $\pi(u)_{\rho_0}$ correspond à l'application intermédiaire $\pi(u)_{0,\rho_0}$ que nous avons définie lors dans la section sur les inverses à droite. Nous avons donc que pour $p > 2$ :

$$\|\overline{\partial}_{J_B}(\pi(u)_{\rho_0})\|_{L^p} \leq c|\rho_0|^{1/2p} = O(|\rho_0|^{1/2p}),$$

pour une certaine constante indépendante de $|\rho_0|$ (cf 5.2.2). On vérifie aisément que :

$$u_B = \exp_{\pi(u)_{\rho_0}}((1-\beta_{\rho_0})\xi)$$

où $\beta_{\rho_0} = \beta(\frac{z}{\rho_0^{1/4}})$. Cette dernière application est donc holomorphe par hypothèse. Or, comme déjà mentionné, $\pi(u)_{0,\rho_0}$ est $W^{1,p}$ proche de $\pi(u_0)$ ce qui s'exprime par (cf [29] lemme 10.4.3) :

$$\|\xi - \beta_{\rho_0}\xi\|_{W^{1,p}(D(1))} \leq c'\|\xi\|_{W^{1,p}(D(2|\rho_0|^{1/4}))} = O(|\rho_0|^{1/4})$$

pour une constante $c'$ indépendante de $\rho_0$ encore une fois. Par conséquent, pour $|\rho_0|$ suffisamment petit nous satisfaisons les hypothèses du théorème des fonctions implicites et ainsi

$$u_B = \widetilde{Gl}_{S_B^u}(\pi(u),\mathrm{j},\rho_0),$$

ce qui nous permet de conclure.

**Cas 2.** Cette fois encore, notons que le domaine de la projection $\pi(u)$ est balancé et que

$$\mathrm{Aut}(\mathrm{j}) = \prod_{k \in C^*_{1,2}} S^1.$$

En ajoutant 1 point marqué, en l'occurrence $\{1\}$, sur chaque composante de la branche connectante $C^*_{1,2}$, l'application $\pi(u)$ est alors une application stable dans $B$. Soit $\mathbf{j}'$ la structure conforme résultant de cette opération appliquée sur $\mathbf{j}$ ci-dessus. Posons $k = |C^*_{1,2}|$ et soit $\widetilde{\mathcal{M}}^b_{\mathcal{S}^u_B(k)}(B)$ la stabilisation par ajout des $k$-points marqués. Nous avons encore une fois une application de recollement donnée par :

$$\widetilde{Gl}_{\mathcal{S}^u_B(k)} : \widetilde{\mathcal{L}}^*_{\mathcal{S}^u_B(k)} \longrightarrow \widetilde{\mathcal{M}}_{0,l+k}(B, \sigma_B),$$

où $\widetilde{\mathcal{L}}^*_{\mathcal{S}^u_B(k)}$ est donné par :

$$\mathcal{F}^*_{map}\widetilde{\mathcal{L}}^*_{\mathcal{F}_{map}(\mathcal{S}^u_B(k))}.$$

Par définition du recollement, et étant donné que les composantes de $\pi(u)$ qui proviennent de la branche connectante sont constantes, nous avons que les applications définies par :

$$\widetilde{Gl}_{\mathcal{S}^u_B(k)}(\pi(u), \mathrm{j}', \rho) \quad \text{et} \quad \widetilde{Gl}_{\mathcal{S}^u_B}(\pi(u), \mathrm{j}, \rho)$$

coïncident pour tout $\rho$ et aussi pour n'importe quel choix de paramétrisation ($\mathrm{j}'$) sur le domaine $\Sigma$ de $\mathbf{j}$ (ici l'équivariance de $Gl_{\mathcal{S}^u_B}$ par rapport à $\mathrm{Aut}(\mathrm{j})$ est nécessaire). Soit $\Sigma_\rho$ et $\Sigma'_\rho$ les domaines respectifs des recollement $\mathbf{j}_\rho$ et $\mathbf{j}'_\rho$. Alors $\Sigma_\rho$ est obtenu à partir de $\Sigma'_\rho$ en oubliant les points marqués ajoutés.

Nous voulons à présent comparer le recollement de $(\pi(u), \mathrm{j}')$ avec celui de $(u_B, \mathrm{j}_B)$. Mais ce deuxième élément est l'image de $(\pi(u), \mathrm{j}')$ via l'application qui oublie les points marqués supplémentaires (tout en stabilisant) :

$$\mathcal{F}_{\mathcal{S}^u_B(k)} : \widetilde{\mathcal{M}}^b_{\mathcal{S}^u_B(k)}(B) \longrightarrow \widetilde{\mathcal{M}}^b_{\mathcal{S}_B}(B).$$

On note que la préimage de $(u_B, \mathrm{j}_B)$ est donnée par l'ensemble des paramétrisations possibles pour $\mathrm{j}$, étant donné que $u_B$ et $\pi(u)$ ont la même image. Ainsi, il nous faut seulement identifier les recollements des domaines, autrement dit on se retrouve essentiellement dans le cas $B = pt$ qui correspond au recollement pour la courbe universelle

$$\mathcal{F}_k : \overline{\mathcal{M}}_{0,l+k} \longrightarrow \overline{\mathcal{M}}_{0,l}.$$

Mais celui-ci est bien connu [35] et est donné par l'application 5.4.19. En d'autres termes, si $\rho = (\rho_1, ..., \rho_k)$ est un paramètre de recollement pour j$'$ (que nous avons ordonné), et que $\Sigma_B$ désigne la surface de Riemann associée à $\mathrm{j}_B$, alors

$$\Sigma'_\rho \text{ et } \Sigma_{B,\prod_{i=1}^k \rho_i}$$

sont équivalentes et nous obtenons dès lors que

$$\begin{aligned} \pi \circ \widetilde{Gl}_{\mathcal{S}_P}(u, \mathrm{j}, \rho) &= \widetilde{Gl}_{\mathcal{S}_B^u}(\pi(u), \mathrm{j}, \rho) \\ &= \widetilde{Gl}_{\mathcal{S}_B^u(k)}(\pi(u), \mathrm{j}', \rho) = \widetilde{Gl}_{\mathcal{S}_B}(u_B, \mathrm{j}_B, \prod_{i=1}^k \rho_i) \\ &= \widetilde{Gl}_{\mathcal{S}_B} \circ \mathcal{F}_\pi(u, \mathrm{j}, \rho). \end{aligned}$$

□

**Remarque 5.4.12.** *On peut dès lors généraliser au cas "non-stable" la discussion effectuée à la fin de la section du cas "stable". L'exposition est exactement la même .*

## 5.5. Fibration d'espaces de modules

### 5.5.1. Les données de carte

Nous introduisons la notion de donnée de carte ci-dessous. Cette définition qui est reprise de [3], consiste simplement à retranscrire d'une façon abstraite le théorème des fonctions implicites qui est donné plus haut.

**Définition 5.5.1.** (***Cartes***) *Soit $p : Y \longrightarrow X$, une fibration de Banach au-dessus d'une variété de Banach (modélisé sur des applications), et soit $s : X \longrightarrow Y$, une section de Fredholm de ce fibré. Posons $\mathcal{M} = s^{-1}(0)$. Soit $x_0 \in X$ et $V_{x_0}$ un voisinage de $x_0$ que l'on identifie à un voisinage de 0 dans $T_{x_0}X$ noté encore une fois $V_{x_0}$. Supposons que nous ayons :*

(i) *$U$ une sous-variété de $V_{x_0}$ dans $T_{x_0}X$,*

(ii) *une boule* $B_\delta \subset Y_{x_0}$*, un voisinage* $V'_{x_0}$ *de 0 dans* $V_{x_0}$*, et un difféomorphisme*

$$\phi : U \times B_\delta \longrightarrow V'_{x_0},$$

(iii) *une section lisse*

$$f : U \longrightarrow B_\delta,$$

*de sorte que l'application :*

$$F : U \xrightarrow{1\times f} U \times B_\delta \xrightarrow{\phi} V'_{x_0},$$

*envoie de façon difféomorphe la sous-variété* $U$ *sur* $V'_{x_0} \cap \mathcal{M}$*. Alors on dit que le triplet* $(U, \phi, F)$*, ou encore* $(U, \phi, f)$*, est une* **donnée de carte** *pour* $\mathcal{M}$*.*

En l'occurrence, la paire $(U, F)$ définit bien par définition une carte pour $V'_{x_0} \cap \mathcal{M}$. La proposition suivante est montrée dans [**3**]. Le point essentiel dans la preuve, est que nous nous restreignons toujours à des sous-ensembles dont les éléments sont lisses par holomorphicité.

**Proposition 5.5.1.** *Deux cartes provenant de données de cartes différentes, sont compatibles de façon lisse, c'est à dire les changements de cartes sont* $C^\infty$*.*

Le lemme suivant est immédiat :

**Lemme 5.5.2.** *Les triplets* $(U_P, f^P, Gl^P)$ *et* $(U_B, f^B, Gl^B)$ *donnés plus haut, définissent des données de cartes pour* $\mathcal{M}_{0,l}(P, \sigma, J_P)$ *et* $\mathcal{M}_{0,l}(B, \sigma_B, J_B)$ *respectivement, qui sont compatibles avec la projection* $\pi$*.*

Plus généralement, soit $\mathcal{S}_P$ une donnée de strate stable et $\mathcal{S}_B$ sa projection via $\mathcal{F}_\pi$. Une donnée de carte pour un ouvert de $\mathcal{M}_{\mathcal{S}_P}(P, J_P)$ peut être fournie par une paire $(U_P, Q)$ où $U_P$ désigne une sous variété lisse de l'espace de Banach $\mathcal{B}^{1,p}_{\mathcal{S}_P}$ des courbes stables représentées par $\mathcal{S}_P$, et

$$Q := \{Q_u | u \in U_P\},$$

est une famille lisse sur $U_P$ d'inverses à droites pour l'opérateur $D_u$, et qui satisfont les conditions suivantes :

**Hypothèses 5.5.3.** • *pour tout* $u \in U_P$ *nous avons*

$$\|du\|_{L^p} \leq C_P \quad et \quad \|\overline{\partial}_{J_P} u\|_{L^p} \leq \epsilon_P,$$

- *pour tout $\xi \in T_u U_P$ nous avons :*

$$\|\frac{d}{d\xi}\overline{\partial}_{J_P}u\|_{L^p} \leq \epsilon\|\xi\|_{W^{1,p}},$$

- *La famille $Q_u$ est Lipschitz continue pour la constante $C_P$ et nous avons que pour tout $u \in U_P$ :*

$$\|Q_u\| \leq C_P,$$

*pour des constantes positives $C$ et $\epsilon$ telles que $C_P\epsilon_P << 1$.*

Notons que ces conditions sont en réalité celles qui nous permettent d'obtenir les applications de recollement ainsi que la propriété de difféomorphisme local dont elles jouissent.

Précisément, soit $u_0 \in U_P$ et soit $W$ un voisinage de 0 dans $T_{u_0}\mathcal{B}^{1,p}_{\mathcal{S}_P}$. Dénotons par $\widetilde{U}_P$ le relevé (local autour de $u_0$) de $U_P$ dans $W$ via $\exp^{-1}_{u_0}$. On définit alors simplement l'application

$$\phi_P : \widetilde{U}_P \times \mathcal{E}^p_{P,u_0}(\mathcal{S}_P) \longrightarrow \mathcal{X}^{1,p}_{P,u_0}, \quad (\xi, \eta) \mapsto \xi + Q_{u_0}\eta,$$

et sous les conditions données, on peut construire autour de $u_0$ une unique application lisse $f^P : U_P \longrightarrow B_\delta$ de sorte que

$$\overline{\partial}_{J_P} \exp_{u_0} \phi_P(\xi, f^P(\xi)) = 0.$$

En réduisant de surcroît les voisinages en jeu, et $\delta$, on peut montrer que $\phi_P$ est un difféomorphisme, ce qui nous donne ce que $(U_P, \phi_P, f^P)$ est une donnée de carte.

En considérant une paire $(U_B, Q_B)$ telle que les conditions ci-dessus sont remplies pour $\epsilon_B$ et $C_B$ et telle que $\mathcal{F}_\pi(U_P) = U_B$, nous obtenons une donnée de carte pour $\mathcal{M}_{\mathcal{S}_B}(B, J_B)$ compatible avec la donnée de carte engendrée par $(U_P, Q)$.

### 5.5.2. Applications de recollement admissible.

Soit $\mathcal{S}_P$ tel que $\mathcal{S} = \mathcal{F}_{map}(\mathcal{S}_P)$ et $\mathcal{S}_B = \pi(\mathcal{S}_P)$ sont stables. Soit $\mathcal{D}_P := (U_P, Q)$ une paire se projetant sur la paire $\mathcal{D}_B := (U_B, Q^B)$ et supposons que ces paires satisfont les conditions de (5.5.3) pour des paires de constantes $(C_P, \epsilon_P)$ et $(C_B, \epsilon_B)$. Supposons de surcroît, que ces paires engendrent respectivement des données de cartes $(U_P, \phi_P, f^P)$ et $(U_B, \phi_B, f^B)$ pour des voisinages ouverts propres $\widetilde{U}_P \subset \mathcal{M}_{\mathcal{S}_P}(P, J_P)$ et $\widetilde{U}_B \subset \mathcal{M}_{\mathcal{S}_B}(B, J_B)$ qui sont compatibles. Autrement dit, nous avons des difféomorphismes :

$$\Psi_P := \phi_P \circ (1 \times f^P) : U_P \longrightarrow \widetilde{U}_P \quad \text{et} \quad \Psi_B := \phi_B \circ (1 \times f^B) : U_B \longrightarrow \widetilde{U}_B \tag{5.5.1}$$

tels que

$$\pi \circ \Psi_B = \Psi_P \circ \pi.$$

On peut construire, à partir de ces données, de nouvelles applications de recollement

$$Gl_{\mathcal{D}_P} : \mathcal{L}_{\mathcal{S}}|_{\widetilde{U}_P} \longrightarrow \mathcal{M}_{0,l}(P, \sigma, J_P) \quad \text{et} \quad Gl_{\mathcal{D}_B} : \mathcal{L}_{\mathcal{S}}|_{\widetilde{U}_B} \longrightarrow \mathcal{M}_{0,l}(B, \sigma_B, J_B),$$

en précomposant par ces cartes. Précisément, étant donné que l'hypothèse (5.5.3) est satisfaite, on peut construire de la même façon que précédemment, les applications de recollement :

$$Gl^P : \mathcal{L}_{\mathcal{S}}|_{U_P} \longrightarrow \mathcal{M}_{0,l}(P, \sigma, J_P) \quad \text{et} \quad Gl^B : \mathcal{L}_{\mathcal{S}}|_{U_B} \longrightarrow \mathcal{M}_{0,l}(B, \sigma_B, J_B),$$

qui sont compatibles avec la projection $\mathcal{F}_\pi$. Il suffit alors de poser :

$$Gl_{\mathcal{D}_P} := Gl^P \circ \Psi_P^{-1} \quad \text{et} \quad Gl_{\mathcal{D}_B} := Gl^B \circ \Psi_B^{-1}. \tag{5.5.2}$$

**Remarque 5.5.1.** *Par définition, nous avons la compatibilité par rapport à la projection de la fibration Hamiltonienne :*

$$\pi \circ Gl_{\mathcal{D}_P} = Gl_{\mathcal{D}_B} \circ \mathcal{F}_\pi.$$

En suivant la terminologie de [3], nous introduisons quelques nouveaux termes :

**Définition 5.5.2.** *Les applications de recollement $Gl_{\mathcal{D}^P}$ et $Gl_{\mathcal{D}^B}$ sont appelées* ***applications de recollement admissibles****. De plus, si $U_P \subset \mathcal{M}_{\mathcal{S}_P}(P, J_P)$, nous dirons que $Gl_{\mathcal{D}^P}$ est de* ***type****-1, et autrement nous dirons que cette application de recollement est de* ***type****-2. Nous faisons les mêmes définitions dans le cas de $Gl_{\mathcal{D}^B}$.*

Observons aussi que les applications de recollement $Gl^P$ et $Gl^B$ construites directement à partir de $\widetilde{U}_P$ et $\widetilde{U}_B$ sont trivialement admissibles. On peut se poser la question suivante : à quel point les applications $Gl^P$ et $Gl_{\mathcal{D}_P}$ (et respectivement $Gl^B$ et $Gl_{\mathcal{D}_B}$) sont-elles compatibles ? Nous allons montrer que chacune de ces applications sont en réalité compatibles avec la structure $C^\infty$ des strates supérieures $\mathcal{M}_{0,l}(P,\sigma,J_P)$ et $\mathcal{M}_{0,l}(B,\sigma_B,J_B)$. Avant de ce faire, nous vérifions déjà la compatibilité au sens $C^0$.

## 5.6. Structure de fibration d'orbifolds topologiques

Nous allons montrer ici que les espaces de modules

$$\overline{\mathcal{M}}_{0,l}(P,\sigma,J_P) \quad \text{et} \quad \overline{\mathcal{M}}_{0,l}(B,\sigma_B,J_B),$$

possèdent, sous l'hypothèse 5.0.4, une structure d'orbifold lisse compatible avec la projection $\pi$. Nous devons déjà montrer que ce sont des orbifolds topologiques dans leur globalité. Cela résulte de la propriété suivante qui exprime le fait que les différentes cartes obtenues via le processus de recollement, sont en fait compatibles au sens continu.

**Proposition 5.6.1.** *(Chen, Li) Soit $p > 2$. Il existe des constantes $C^P(\rho)$ et $C^B(\rho)$ convergeant vers 0 lorsque $\rho \longrightarrow 0$, telles que :*

$$\|Gl^P(u,\mathrm{j},\rho) - Gl_{\mathcal{D}_P}(u,\mathrm{j},\rho)\| \leq C^P(\rho)$$

*et*

$$\|Gl^B(\pi(u),\mathrm{j},\rho) - Gl_{\mathcal{D}_B}(\pi(u),\mathrm{j},\rho)\| \leq C^B(\rho).$$

**Preuve:** Ces deux identités se dérivent de la même façon. La preuve est donnée dans [3] théorème 11.2.

□

Comme conséquence directe de cette proposition nous avons que :

**Corollaire 5.6.2.** *Les applications $(Gl^P)^{-1}Gl_{\mathcal{D}_P}$, $(Gl^B)^{-1}Gl_{\mathcal{D}_B}$ et leurs inverses sont continues.*

Maintenant, pour chaque point $(u,\mathrm{j}) \in \mathcal{M}_{S_P}(P,J_P)$, et $u_B \equiv (\pi(u),\mathrm{j}) \in \mathcal{M}_{S_B}(B,J_B)$, nous avons vu qu'il existe des voisinages $U_P$ et $U_B$ autour de ces points, ainsi que des nombres positifs $\epsilon_P$ et $\epsilon_B$, dépendant de $U_P$ et $U_B$, tels que :

$$Gl_{S_P} : \mathcal{L}_{S_P,\epsilon_P}|_{U_P} \longrightarrow \overline{\mathcal{M}}_{0,l}(P,\sigma,J_P), \quad \text{et} \quad Gl_{S_B} : \mathcal{L}_{S_B,\epsilon_B}|_{U_B} \longrightarrow \overline{\mathcal{M}}_{0,l}(B,\sigma_B,J_B),$$

existent et satisont la relation de compatibilité

$$\pi \circ Gl_{\mathcal{S}_P} = Gl_{\mathcal{S}_B} \circ \mathcal{F}_\pi.$$

Nous définissons maintenant une base de topologie sur les compactifications des espaces de modules, induite par les applications de gluing.

**Définition 5.6.1.** *On définit un voisinage ouvert de* $(u_B, \mathbf{j})$ *dans* $\overline{\mathcal{M}}_{0,l}(B, \sigma_B, J_B)$ *comme étant l'image de* $Gl_{\mathcal{S}_B}$*. De même, on définit un voisinage ouvert de* $(u, \mathbf{j})$ *dans* $\overline{\mathcal{M}}_{0,l}(P, \sigma, J_P)$ *comme étant l'image de* $Gl_{\mathcal{S}_P}$*.*

Nous avons :

**Théorème 5.6.3.** *Supposons la condition* (5.0.4)*. Alors les espaces de modules* $\overline{\mathcal{M}}_{0,l}(P, \sigma, J_P)$ *et* $\overline{\mathcal{M}}_{0,l}(B, \sigma_B, J_B)$ *sont des orbifolds topologiques. De surcroît, l'application* $\mathcal{F}_\pi$ *est une application continue d'orbifold, ouverte, surjective, entre ces espaces, pour la topologie donnée.*

**Preuve:** La première affirmation provient du fait qu'autour de chaque point un voisinage est donné par une carte fournie du type $(\mathcal{L}_{\mathcal{S}_P, \epsilon_P}|_{U_P}, Gl_{\mathcal{S}_P})$ ou encore $(\mathcal{L}_{\mathcal{S}_B, \epsilon_B}|_{U_B}, Gl_{\mathcal{S}_B})$ et que les applications de transition sont continues par la $C^0$-compatibilité décrite plus haut. La deuxième découle directement du fait que les applications de gluing dans la base et dans l'espace totale sont compatibles avec la projection $\pi$.

□

**Structure de fibration lisse.** Nous construisons sur les espaces

$$\overline{\mathcal{M}}_{0,l}(P, \sigma, J_P) \quad \text{et} \quad \overline{\mathcal{M}}_{0,l}(B, \sigma_B, J_B)$$

des atlas de sorte que ces espaces héritent d'une structure lisse, et que $\pi$ est compatible avec cette structure lisse.

**Définition 5.6.2.** *Un recouvrement de* $\overline{\mathcal{M}}_{0,l}(P, \sigma, J_P)$ *par ses strates consiste en des paires* $(U_{\mathcal{S}_P}, \epsilon_{\mathcal{S}_P})$ *pour chaque donnée de strate stable* $\mathcal{S}_P$ *telles que :*

- $U_{\mathcal{S}_P}$ *est un ouvert propre de* $\mathcal{M}_{\mathcal{S}_P}(P, J_P)$*,*
- *il existe une application de recollement* $Gl_{\mathcal{S}_P}$ *bien définie sur* $\mathcal{L}_{\mathcal{S}_P, \epsilon_{\mathcal{S}_P}}\Big|_{U_{\mathcal{S}_P}}$*,*

- *si on pose*

$$W_{\mathcal{S}_P} := Gl_{\mathcal{S}_P}(\mathcal{L}_{\mathcal{S}_P,\epsilon_{\mathcal{S}_P}}\Big|_{U_{\mathcal{S}_P}}),$$

*alors on a que pour n'importe quelles deux données de strates (représentatives), $\mathcal{S}_P$ et $\mathcal{S}'_P$ :*

$$W_{\mathcal{S}_P} \cap W_{\mathcal{S}'_P} \neq \emptyset \quad ssi \quad \mathcal{S}_P < \mathcal{S}'_P, \; ou\, \mathcal{S}'_P < \mathcal{S}_P,$$

- *l'ensemble des $W_{\mathcal{S}_P}$ pour toutes les données de strate $\mathcal{S}_P$ apparaissant dans l'espace de modules $\overline{\mathcal{M}}_{0,l}(P,\sigma,J_P)$, forment un recouvrement de ce dernier.*

On définit de la même façon un recouvrement par strates de $\overline{\mathcal{M}}_{0,l}(B,\sigma_B,J_B)$. On montre à présent que l'on peut construire de tels recouvrement de façon compatible avec la projection.

**Lemme 5.6.4.** *Il existe des recouvrements par strates $(U_{\mathcal{S}_P},\epsilon_{\mathcal{S}_P})$ de $\overline{\mathcal{M}}_{0,l}(P,\sigma)$, et $(U_{\mathcal{S}_B},\epsilon_{\mathcal{S}_B})$ de $\overline{\mathcal{M}}_{0,l}(B,\sigma_B)$, tels que*

$$\mathcal{F}_\pi(U_{\mathcal{S}_P}) = U_{\mathcal{F}_\pi(\mathcal{S}_P)}.$$

**Preuve:** Nous allons procéder par induction sur les strates données par $\mathcal{D}^B := \mathcal{D}_{0,l}^{\sigma_B,J_B}$ et $\mathcal{D}^P := \mathcal{D}_{0,l}^{\sigma,J_P}$. L'induction consiste à montrer que pour chaque strate, chaque point de la définition de recouvrement par strates est satisfait ainsi que la compatibilité avec $\pi$. Pour ce faire, nous commençons par les strates minimales dans $\overline{\mathcal{M}}_{0,l}(B,\sigma_B)$ et on montre inductivement que les trois premiers points de la définition sont satisfaits pour toute strate dans $\overline{\mathcal{M}}_{0,l}(P,\sigma)$ se projetant sur les strates minimales. Nous itérons ensuite le processus en passant aux strates supérieures dans $\overline{\mathcal{M}}_{0,l}(B,\sigma_B)$.

Soient $\mathcal{S}_{B,0}$ l'ensemble des strates minimales dans $\mathcal{D}_{0,l}^{\sigma_B,J_B}$. Pour $\mathcal{S}_B$ dans $\mathcal{S}_{B,0}$ nous posons $U_{\mathcal{S}_B} = \mathcal{M}_{\mathcal{S}_B}(B)$, et comme $\mathcal{S}_B$ est minimale nous avons que $U_{\mathcal{S}_B}$ est compact et il existe donc $\epsilon_{\mathcal{S}_B}$ et une application de recollement $Gl_{\mathcal{S}_B}$ bien définie sur :

$$\mathcal{L}^*_{\mathcal{S}_B,\epsilon_{\mathcal{S}_B}}\Big|_{U_{\mathcal{S}_B}}.$$

De surcroît, les strates minimales sont isolées l'une de l'autre et comme $\overline{\mathcal{M}}_{0,l}(B,\sigma_B)$ est Hausdorff, nous pouvons choisir pour chaque $\mathcal{S}_B \in \mathcal{S}_{B,0}$ un $\epsilon_B$ assez petit de sorte que les voisinages résultants du guing ne s'intersectent pas. Maintenant, désignons par $\mathcal{S}_{P,0,0,\mathcal{S}_B}$ l'ensemble des strates minimales dans

$$\mathcal{D}_{0,l}^{\sigma,J_P} \cap \mathcal{F}_\pi^{-1}(\mathcal{S}_B),$$

où $\mathcal{S}_B$ est minimale. Pour $\mathcal{S}_P \in \mathcal{S}_{P,0,0,\mathcal{S}_B}$ posons $U_{\mathcal{S}_P} = \mathcal{M}_{\mathcal{S}_P}(P)$. Par le même argument que précédemment, nous obtenons qu'il existe $\epsilon_{\mathcal{S}_P}$ et $Gl_{\mathcal{S}_P}$, de domaine

$$\mathcal{L}^*_{\mathcal{S}_P,\epsilon_{\mathcal{S}_P}}\Big|_{U_{\mathcal{S}_P}},$$

et qui de plus satisfont :

$$\pi \circ Gl_{\mathcal{S}_P} = Gl_{\mathcal{S}_B} \circ \mathcal{F}_\pi.$$

Encore une fois, nous pouvons choisir les $\epsilon_{\mathcal{S}_P}$ assez petits de sorte que :

$$W_{\mathcal{S}_P} \cap W_{\mathcal{S}'_P} = \emptyset,$$

pour n'importe quelles deux strates dans $\mathcal{S}_{P,0,0,\mathcal{S}_B}$. Nous en avons donc terminé avec les strates minimales.

Définissons à présent inductivement $\mathcal{S}_{B,k}$ comme étant l'ensemble des strates minimales de

$$\mathcal{D}^B \backslash \mathcal{S}_{B,k-1},$$

et $\mathcal{S}_{P,k,m_k}$ l'ensemble des strates minimales de

$$\mathcal{D}^P \cap \mathcal{F}_\pi^{-1}(\mathcal{S}_{B,k}) \backslash \mathcal{S}_{P,k,m_k-1}.$$

Supposons aussi que toutes les paires $(U_{\mathcal{S}_B}, \epsilon_{\mathcal{S}_B})$ et $(U_{\mathcal{S}_P}, \epsilon_{\mathcal{S}_P})$, pour $\mathcal{S}_B \in \mathcal{S}_{B,n}$ et $\mathcal{S}_P \in \mathcal{S}_{P,n,m_n}$ avec $n \leq k-1$ et $m_n \leq m_k - 1$, ont été choisies de sorte que les hypothèses d'induction sont satisfaites.

Posons

$$W_{\mathcal{S}_B,\mathcal{S}'_B} := Gl_{\mathcal{S}_B,\mathcal{S}'_B}(\mathcal{L}_{\mathcal{S}_B,\mathcal{S}'_B,\epsilon_{\mathcal{S}_B}}\Big|_{U_{\mathcal{S}_B}}).$$

Alors pour $\mathcal{S}'_B \in \mathcal{S}_{B,k}$ on peut choisir un ouvert propre $U_{\mathcal{S}'_B}$ tel que :

$$\{W_{\mathcal{S}_B,\mathcal{S}'_B} | \mathcal{S}_B < \mathcal{S}'_B\} \cup U_{\mathcal{S}'_B},$$

recouvre $\mathcal{M}_{\mathcal{S}'_B}(B)$. De plus, il existe $\epsilon_{\mathcal{S}'_B}$ tel que

$$Gl_{\mathcal{S}'_B} : \mathcal{L}^*_{\mathcal{S}'_B,\epsilon_{\mathcal{S}'_B}}\Big|_{U_{\mathcal{S}'_B}} \longrightarrow \mathcal{M}_{0,l}(B, \sigma_B),$$

est définie, et on peut s'assurer encore une fois, en réduisant les $\epsilon_{\mathcal{S}'_B}$ et $\epsilon_{\mathcal{S}_B}$ trouvés, que l'intersection de $W_{\mathcal{S}'_B}$ avec $W_{\mathcal{S}_B}$ est vide, pour tout

$$\mathcal{S}'_B \in \mathcal{S}_{B,k} \quad \text{et} \quad \mathcal{S}_B \in \bigsqcup_{i=0}^{k} \mathcal{S}_{B,i},$$

à moins que $\mathcal{S}_B < \mathcal{S}'_B$.

Maintenant, comme les gluing commutent avec la projection, il suffit de fixer $\mathcal{S}_B \in \mathcal{S}_{B,k}$, et de reproduire exactement le même argument que ci-dessus pour les éléments de $\mathcal{S}_{P,k,m_k,\mathcal{S}_B} := \mathcal{S}_{P,k,m_k} \cap \mathcal{F}_\pi^{-1}(\mathcal{S}_B)$. On pose donc

$$W_{\mathcal{S}_P,\mathcal{S}'_P} := Gl_{\mathcal{S}_P,\mathcal{S}'_P}(\,\mathcal{L}_{\mathcal{S}_P,\mathcal{S}'_P,\epsilon_{\mathcal{S}_P}}\Big|_{U_{\mathcal{S}_P}}),$$

où $\mathcal{S}'_P$ se projette sur $\mathcal{S}_B$. Notons que par propriété du recollement nous avons que $W_{\mathcal{S}_P,\mathcal{S}'_P}$ se projette sur $W_{\mathcal{F}_\pi(\mathcal{S}_B),\mathcal{F}_\pi(\mathcal{S}'_B)}$. Enfin, on choisit un ouvert propre $U_{\mathcal{S}'_P}$ tel que

$$\{W_{\mathcal{S}_P,\mathcal{S}'_P} | \mathcal{S}_P < \mathcal{S}'_P\} \cup U_{\mathcal{S}'_P},$$

recouvre $\mathcal{M}_{\mathcal{S}'_P}(P)$, et pour $\epsilon_{\mathcal{S}'_P}$ bien choisi on a une application $Gl_{\mathcal{S}'_P}$ dont l'image n'intersecte aucun autre voisinage obtenu jusque-là, à moins qu'il ne provienne d'une strate $\mathcal{S}_P$ telle que $\mathcal{S}_P < \mathcal{S}'_P$. Nous concluons par induction.

□

**Remarque 5.6.1.** *Considérons la restriction pour de $\overline{\mathcal{M}}(P,\sigma)$ au-dessus de la strate $\mathcal{M}_{\mathcal{S}_B}(B)$ pour une certaine donnée de strate stable $\mathcal{S}_B$ :*

$$\overline{\mathcal{M}}^v_{\mathcal{S}_B}(P) := \bigsqcup_{\{\mathcal{S}_P \text{ stables } | \mathcal{F}_\pi(\mathcal{S}_P) = \mathcal{S}_B\}} \mathcal{M}_{\mathcal{S}_P}(P).$$

*Par la construction faite ci-dessus, cet espace stratifié (dont chaque composante est une orbi-variété par* (5.0.4)*), est recouvert par ses strates dans le sens donné par la définition ci-haut, au-dessus de $U_{\mathcal{S}_B}$.*

Un recouvrement par strates induit un atlas. On peut se demander si les fonctions de transition de cet atlas sont lisses, auquel cas nous obtenons directement une structure de variété lisse pour les espaces de modules concernés. Toutefois pour ce faire, nous devons tenir compte d'un nombre imposant de choix effectués en cours de route, et cela pourrait s'avérer faux en toute généralité. À la place, on montre (cf [3]) qu'il existe pour chaque donnée de strate des cartes $Gl_{\mathcal{S}_B}$ telles que

$$Gl_{\mathcal{S}_B} \circ Gl^{-1}_{\mathcal{S}_B, \mathcal{S}'_B},$$

est lisse pour toute paire $\mathcal{S}'_B > \mathcal{S}_B$, ce qui nous donne ainsi un atlas lisse (pas canonique). Nous adaptons leur procédure à notre situation.

**Lemme 5.6.5.** *Il existe des recouvrements par strates $(U_{\mathcal{S}_P}, \epsilon_{\mathcal{S}_P})$ et $(U_{\mathcal{S}_B}, \epsilon_{\mathcal{S}_B})$, ainsi que des applications de recollement $Gl_{\mathcal{S}_P}$ et $Gl_{\mathcal{S}_B}$, qui sont compatibles avec la projection $\mathcal{F}_\pi$, et tels que pour toutes données de strate $\mathcal{S}_P$ et $\mathcal{S}_B$, les recollements $Gl_{\mathcal{S}_P}$ et $Gl_{\mathcal{S}_B}$ coïncident avec n'importe quels autres applications de recollement*

$$Gl'_{\mathcal{S}_P} = Gl_{\mathcal{S}'_P} \circ Gl^{-1}_{\mathcal{S}'_P, \mathcal{S}_P} \quad et \quad Gl'_{\mathcal{S}_B} = Gl_{\mathcal{S}'_B} \circ Gl^{-1}_{\mathcal{S}'_B, \mathcal{S}_B},$$

*obtenues pour des données satisfaisant $\mathcal{S}'_P < \mathcal{S}_P$ et $\mathcal{S}'_B < \mathcal{S}_B$.*

**Preuve:** La preuve est par induction sur les strates comme dans le lemme précédent. Soient $\mathcal{S}_{B,k}$ et $\mathcal{S}_{P,k,m_k}$ comme dans le-dit lemme. En argumentant comme avant, nous voyons que c'est vrai pour les ensembles de strates minimales $\mathcal{S}_{B,0}$ et $\mathcal{S}_{P,0,0}$. Supposons que le résultat est réalisé pour tout $\mathcal{S}_B \in \mathcal{S}_{B,n}$ et $\mathcal{S}_P \in \mathcal{S}_{P,n,m_n}$ avec $n \leq k-1$ et $m_n \leq m_k - 1$. Soit $\mathcal{S}_B \in \mathcal{S}_{B,k}$. Posons aussi

$$W_{\mathcal{S}_B} := \cup_{\mathcal{S}'_B < \mathcal{S}_B} W_{\mathcal{S}'_B, \mathcal{S}_B}.$$

Désignons par $Gl'_{\mathcal{S}_B}(\mathcal{S}'_B)$ l'application induite par $\mathcal{S}'_B < \mathcal{S}_B$. Nous rappelons que cette application est définie au-dessus de $W_{\mathcal{S}'_B, \mathcal{S}_B}$. Nous devons montrer que

$$Gl'_{\mathcal{S}_B}(\mathcal{S}'_B) = Gl'_{\mathcal{S}_B}(\mathcal{S}''_B), \tag{5.6.1}$$

sur l'intersection $W_{\mathcal{S}'_B, \mathcal{S}_B} \cap W_{\mathcal{S}''_B, \mathcal{S}_B}$. Mais ce domaine est non vide ssi $\mathcal{S}''_B < \mathcal{S}"_B$ (ou l'inverse). Or, par hypothèse d'induction nous avons que $Gl'_{\mathcal{S}'_B}(\mathcal{S}''_B) = Gl_{\mathcal{S}'_B}$ cette fois-ci sur $W_{\mathcal{S}''_B, \mathcal{S}'_B} \cap U_{\mathcal{S}'_B}$. Ainsi :

$$\begin{aligned} Gl'_{\mathcal{S}_B}(\mathcal{S}''_B) &= Gl_{\mathcal{S}''_B} \circ Gl^{-1}_{\mathcal{S}''_B, \mathcal{S}_B} \\ &= Gl_{\mathcal{S}''_B} \circ Gl^{-1}_{\mathcal{S}''_B, \mathcal{S}'_B} \circ Gl_{\mathcal{S}''_B, \mathcal{S}'_B} \circ Gl^{-1}_{\mathcal{S}''_B, \mathcal{S}_B} \\ &= Gl_{\mathcal{S}'_B} \circ Gl_{\mathcal{S}''_B, \mathcal{S}'_B} \circ Gl^{-1}_{\mathcal{S}''_B, \mathcal{S}_B}, \end{aligned}$$

ce qui nous donne (5.6.1). Nous obtenons donc une application de recollement $Gl'_{\mathcal{S}_B}$ sur tout $W_{\mathcal{S}_B}$. Maintenant, étant donné une application de recollement $Gl''_{\mathcal{S}_B}$ sur $U_{\mathcal{S}_B}$, nous dérivons une troisième application $Gl_{\mathcal{S}_B}$, qui est obtenue en recollant ensemble $Gl'_{\mathcal{S}_B}$ et $Gl''_{\mathcal{S}_B}$ à l'aide d'une fonction saut (cut-off), ce qui termine l'induction pour le cas de $\overline{\mathcal{M}}_{0,l}(B,\sigma_B)$.

Nous expliquons plus en détail comment $Gl'_{\mathcal{S}_B}$ et $Gl''_{\mathcal{S}_B}$ sont recollés. Cela se réduit à considérer la situation suivante. Soit $\mathcal{S}'_B$ tel que $\mathcal{S}'_B < \mathcal{S}_B$ et le recollement correspondant $Gl'_{\mathcal{S}_B}(\mathcal{S}'_B)$ sur $W_{\mathcal{S}'_B,\mathcal{S}_B}$. Par définition :

$$W_{\mathcal{S}'_B,\mathcal{S}_B} = Gl_{\mathcal{S}'_B,\mathcal{S}_B}(\mathcal{L}_{\mathcal{S}'_B,\mathcal{S}_B,\epsilon_{\mathcal{S}'_B}}\Big|_{U_{\mathcal{S}'_B}}) \equiv W_{\mathcal{S}'_B,\mathcal{S}_B}(\epsilon_{\mathcal{S}'_B}).$$

$Gl'_{\mathcal{S}_B}(\mathcal{S}'_B)$ est un recollement de type-2. La coordonnée de carte associée $(V,\phi,F)$ est donnée par

$$V = \mathrm{prgl}(\mathcal{L}_{\mathcal{S}'_B,\mathcal{S}_B,\epsilon_{\mathcal{S}'_B}})$$

et

$$F : V \longrightarrow \mathcal{M}_{\mathcal{S}_B}(B), \quad (u_{B,\rho},\mathrm{j}_\rho) \mapsto \exp_{u_{B,\rho}} Q^B_{u_{B,\rho}} f_{\mathcal{S}_B}(u_B,\mathrm{j},\rho),$$

où

$$(u_{B,\rho},\mathrm{j}_\rho) = \mathrm{prgl}(u_B,\mathrm{j},\rho)$$

pour

$$(u_B,\mathrm{j},\rho) \in \mathcal{L}_{\mathcal{S}'_B,\mathcal{S}_B,\epsilon_{\mathcal{S}'_B}}\Big|_{U_{\mathcal{S}'_B}}.$$

Considérons une fonction :

$$\nu : \mathcal{L}_{\mathcal{F}_{map}(\mathcal{S}'_B),\mathcal{F}_{map}(\mathcal{S}_B),\epsilon_{\mathcal{S}'_B}} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \nu(\mathrm{j},\rho) \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } |\rho| \leq 0.5\epsilon_{\mathcal{S}'_B} \\ 1 & \text{si } |\rho| \geq 0.75\epsilon_{\mathcal{S}'_B}. \end{cases}$$

En utilisant cette fonction, on relie les domaines des données de cartes pour $Gl''_{\mathcal{S}_B}$ et $Gl'_{\mathcal{S}_B}(\mathcal{S}'_B)$, i.e qui recolle $U_{\mathcal{S}_B}$ et $V$. Le nouveau domaine est donné comme suit :

$$V' := \mathrm{Im}(\exp_{u_{B,\rho}}\Big(\nu(\mathrm{j},\rho)Q^B_{u_{B,\rho}} f_{\mathcal{S}_B}(u_B,\mathrm{j},\rho)\Big)).$$

Ainsi, par définition $V'$ coïncide avec $V$ pour des valeurs de $|\rho| \leq 0.5\epsilon_{\mathcal{S}'_B}$, et avec $U_{\mathcal{S}'_B}$ pour $|\rho| \geq 0.75\epsilon_{\mathcal{S}'_B}$. On peut s'assurer que la paire

$$(V', \{Q^B_{u_B} | u_B \in V'\}),$$

satisfait les hypothèses (5.5.3), étant donnée que $(V, Q^B|_V)$ les satisfait déjà, que sur la partie dans $U_{\mathcal{S}_B}$ ces hypothèses sont directement satisfaites aussi, et que $\nu$ ne dépend pas de $u_B$, ce qui nous donne une déformation uniforme. Désignons par $Gl_{\mathcal{S}_B}$ l'application de recollement découlant de cette paire $(V', \{Q^B_{u_B} | u_B \in V'\})$. Alors par construction du recollement, nous avons que $Gl_{\mathcal{S}_B}$ coïncide avec $Gl'_{\mathcal{S}_B}(\mathcal{S}'_B)$ sur $V \cap V' = W_{\mathcal{S}'_B, \mathcal{S}_B}(0.5\epsilon_{\mathcal{S}'_B})$, et avec $Gl''_{\mathcal{S}_B}$ sur $U_{\mathcal{S}_B} \cap V'$. En particulier, cette application s'étend à

$$U_{\mathcal{S}_B} \backslash W_{\mathcal{S}'_B, \mathcal{S}_B}(\epsilon_{\mathcal{S}'_B}).$$

En ce qui concerne $\overline{\mathcal{M}}_{0,l}(P, \sigma)$, on procède exactement comme ci-dessus. On fixe $\mathcal{S}_B \in \mathcal{S}_{B,k}$ et on réitère exactement l'argumentation qui précède aux éléments $\mathcal{S}_P \in \mathcal{S}_{P,k,m_k,\mathcal{S}_B}$. Notons toutefois que l'interpolation entre les applications de recollement, décrite plus haut, peut s'effectuer de façon compatible avec la projection.

□

Nous avons ainsi montré l'existence de recouvrements pour lesquels les cartes sont compatibles et qui est de sucroît compatible avec la projection. Comme conséquence directe, nous obtenons le théorème suivant :

**Théorème 5.6.6.** *Sous les conditions* (5.0.4), *les espaces de modules* $\overline{\mathcal{M}}(P, \sigma)$ *et* $\overline{\mathcal{M}}(B, \sigma_B)$ *sont des orbi-variétés lisses, et l'application*

$$\mathcal{F}_\pi : \overline{\mathcal{M}}(P, \sigma) \longrightarrow \overline{\mathcal{M}}(B, \sigma_B),$$

*se restreint à une fibration (d'orbifolds) lisse localement triviale au-dessus de chaque strate donnée de* $\overline{\mathcal{M}}(B, \sigma_B)$.

**Preuve:** Par construction, les deux premières affirmations suivent directement. Pour ce qui est de la structure de fibration, il suffit de le voir au-dessus de l'ouvert propre $U_{\mathcal{S}_B}$. Par les lemmes précédent nous obtenons que $\mathcal{F}_\pi$ est une submersion lisse. De surcroît, les fibres de $\mathcal{F}_\pi$ sont ici compactes, de sorte que $\mathcal{F}_\pi$ est propre ce qui termine la démonstration.

□

## 5.7. La formule produit revisitée

Dans ce qui suit nous supposerons que l'hypothèse (5.0.4) est réalisée pour une certaine structure presque complexe fibrée $J_P^H = (J_B, J, H)$ et certaines classes $\sigma$ et $\sigma_B$ telles que $\pi_*\sigma = \sigma_B \neq 0$. Par conséquent $\mathcal{F}_\pi$ est une fibration lorsque restreinte sur la strate supérieure de $\overline{\mathcal{M}}_{0,l}(B, \sigma_B, J_B)$. De plus dans cette situation, nous savons que les strates inférieures des espaces de modules (où nous omettons de mentionner la structure presque complexe) :

$$\overline{\mathcal{M}}_{0,l}(B, \sigma_B)\backslash\mathcal{M}^*_{0,l}(B, \sigma_B) \quad \text{et} \quad \overline{\mathcal{M}}_{0,l}(P, \sigma)\backslash\mathcal{M}^{**}_{0,l}(P, \sigma),$$

sont de codimension au moins 2 et il en va de même en ce qui concerne

$$\overline{F_\pi^{-1}(u_B, \mathbf{x})},$$

et ceci pour tout $(u_B, \mathbf{x}) \in \overline{\mathcal{M}}_{0,l}(B, \sigma_B)$. Nous retrouvons la formule produit en utilisant cette fois l'intégration sur les fibres de $\mathcal{F}_\pi$.

**Proposition 5.7.1.** *Soit $(F, \omega) \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} B$ une fibration Hamiltonienne. Supposons qu'il existe une structure fibrée $J_P^H = (J_B, H, J)$ et des classes $\sigma$ et $\sigma_B$ pour lesquelles l'hypothèse* (5.0.4) *est satisfaite. Alors on retrouve la formule produit par intégration le long des fibres de $\mathcal{F}_\pi$.*

**Preuve:**

Posons

$$\mathcal{M}^{**}_{0,l}(P, \sigma) =: \mathcal{M}^P_{0,l} \quad \text{et} \quad \mathcal{M}^*_{0,l}(B, \sigma_B) =: \mathcal{M}^B_{0,l},$$

et considérons les applications d'évaluation, lisses pour la topologie du recollement,

$$ev^P : \overline{\mathcal{M}}^P_{0,l} \longrightarrow P^l \;\; , \;\; ev^B : \overline{\mathcal{M}}^B_{0,l} \longrightarrow B^l \;\; , \;\; ev_{(u_B, \mathbf{x})} : \overline{\mathcal{F}_\pi^{-1}(u_B, \mathbf{x})} \longrightarrow F^l,$$

où $(u_B, \mathbf{x}) \in \mathcal{M}^B_{0,l}$. A présent, soient $c_i^P$, $c_i^B$ et $c_i^F$ $(i = 1, ..., k)$ des classes d'homologie comme dans (4.1.2) telles que

$$2n_P + 2c_1^{TP}(\sigma) - 6 + 2l - \sum_{i=1}^{l} \deg(PD(c_i^P)) = 0,$$

et

$$2n_B + 2c_1^{TB}(\sigma_B) - 6 + 2l - \sum_{i=1}^{l} \deg(PD(c_i^B)) = 0.$$

Par un théorème de Thom après avoir multiplié ces classes par des entiers bien choisis, les classes résultantes sont représentables par des sous-variétés. Nous supposerons, sans perte de généralité, que ces représentants sont en position générale, et que leurs produits sont respectivement transverses aux applications d'évaluation données ci-dessus. Par conséquent la préimage par $ev^P$, $ev^B$, et $ev_{(u_B,\mathbf{x})}$ des cycles (sous-variétés) produits correspondants sont génériquement (i.e en perturbant les cycles) un nombre fini de points dans $\mathcal{M}^P_{0,l}$, $\mathcal{M}^B_{0,l}$. Cela résulte du fait que les strates inférieures des espaces de modules considérés sont de codimension au moins 2.

Représentons maintenant, les duaux de Poincaré de ces classes par des formes différentielles à support compact dans un voisinage normal assez petit autour des cycles ci-dessus, de sorte que les pull-back de ces formes via $ev^P$, $ev^B$ ou $ev_{(u_B,\mathbf{x})}$, sont respectivement à supports compacts dans les strates supérieures.

Désignons ces formes par $\alpha_i^P$, $\alpha_i^B$, et $\alpha_i^F$. Par définition nous avons que $\alpha_i^P = \pi^*(\alpha_i^B)$ pour $i = k+1, ..., l$. D'autre part, pour $i = 1, ..., k$, nous avons que $\alpha_i^B = \mathrm{vol}(B)$ étant donné que $c_i^B = pt$. Si $\mathcal{N}_i$ désigne un voisinage tubulaire de la fibre au-dessus de $c_i^B = pt$ lorsque $i = 1, ..., k$, et $\rho_i : \mathcal{N}_i \longrightarrow F$ dénote un rétracte de déformation associé à ce voisinage normal, nous obtenons alors :

$$\alpha_i^P = \pi^*\alpha_i^B \wedge \rho_i^*\alpha_i^F = \pi^*\mathrm{vol}(B) \wedge \rho_i^*\alpha_i^F. \tag{5.7.1}$$

Ici nous devons nous assurer que le support de $\pi^*\mathrm{vol}(B)$ ne contient pas strictement le support de $\rho_i^*\alpha_i^F$, ce qui est réalisé en diminuant le support de $\mathrm{vol}(B)$ si nécessaire.

Par définition [**36**] nous avons :

$$GW^P_{0,l}(c_1^P, ..., c_l^P; \sigma) = \int_{\mathcal{M}^P_{0,l}} (ev^P)^* \left(\bigwedge_{i=1}^{l} \alpha_i^P\right) = \int_{\mathcal{M}^B_{0,l}} (\mathcal{F}_\pi)_*(ev^P)^* \left(\bigwedge_{i=1}^{l} \alpha_i^P\right), \tag{5.7.2}$$

où $(\mathcal{F}_\pi)_* = \pi_*$ dénote l'intégration par fibre. En utilisant (5.7.1), l'équation (5.7.2) devient :

$$\int_{\mathcal{M}^B_{0,l}} (\pi)_*(ev^P)^* \left(\bigwedge_{i=1}^{k} (\pi^*\alpha_i^B \wedge \rho_i^*\alpha_i^F)) \wedge \bigwedge_{i=k+1}^{l} \pi^*\alpha_i^B\right).$$

Désignons par $ev_i^P$ la projection de $ev^P$ sur la $i$-ème composante de $P^l$. Définissons $ev_i^B$ et $ev_{(u_B,\mathrm{x}),i}$ similairement. Observons que pour chaque $i = 1, ..., l$, la propriété suivante est satisfaite :

$$\pi \circ ev_i^P = ev_i^B \circ \mathcal{F}_\pi.$$

Aussi, rappelons que nous avons l'identité suivante $\pi_*(a \wedge \pi^* b) = (\pi_* a) \wedge b$, pour $a$ et $b$ des formes quelconques et où $\pi_*$ désigne l'intégration le long des fibres de $\pi$. Nous en déduisons que cette dernière équation doit prendre la forme suivante :

$$(-1)^{\sum_{i=k+1}^{l} \deg\alpha_i^B \sum_{i=1}^{k} \deg\alpha_i^F} \int_{\mathcal{M}_{0,l}^B} \pi_* \left( \bigwedge_{i=1}^{l} \pi^*(ev_i^B)^* \alpha_i^B \wedge \bigwedge_{i=1}^{k} (ev_i^P)^* \rho_i^* \alpha_i^F \right). \quad (5.7.3)$$

L'unique possibilité pour laquelle l'equation ci-dessus est non nécessairement nulle est lorsque

$$\sum_{i=k+1}^{l} \deg\alpha_i^B = \sum_{i=1}^{l} \deg\alpha_i^B = 2n_B + 2c_1(\sigma_B) + 2l - 6$$

qui est pair. Ainsi le terme constant au devant de l'intégrale vaut 1. Par conséquent, nous obtenons :

$$GW_{0,l}^P(c_1^P, ..., c_l^P; \sigma) = \int_{\mathcal{M}_{0,l}^B} \left( (ev^B)^* \bigwedge_{i=1}^{l} \alpha_i^B \right) \wedge \pi_* \left( \bigwedge_{i=1}^{k} (ev_i^P)^* \rho_i^* \alpha_i^F \right),$$

où, par un argument de dimension, le terme

$$\pi_* \left( \bigwedge_{i=1}^{k} (ev_i^P)^* \rho_i^* \alpha_i^F \right)$$

doit être une fonction $\psi$ sur $\mathcal{M}_{0,l}^B$, qui, par le diagramme (4.2.1) est donnée par :

$$\psi(u_B, \mathrm{x}) = \int_{\pi^{-1}(u_B,\mathrm{x})} ev_{(u_B,\mathrm{x})}^* \left( \bigwedge_{i=1}^{k} \alpha_i^F \wedge \bigwedge_{i=k+1}^{l} \mathrm{vol}(F) \right).$$

En désignant par $C$ l'image de $u_B$ nous voyons que $\psi(u_B, \mathrm{x})$ coïncide avec

$$\sum_j GW_{0,l}^{P_C}(\iota_F^{P_C}(c_1^F), ..., \iota_F^{P_C}(c_l^F), \sigma_j),$$

où les $\sigma_j$ sont tels que dans la proposition 4.3.2. Etant donné que pour n'importe quelles deux applications représentant $\sigma_B$ les restrictions de $P$ à ces applications sont homotopes via des difféomorphismes Hamiltoniens, ce nombre est en réalité indépendant de l'application $u_B$. Il est donc possible de retirer $\psi$ de l'intégrale, et de conclure par la même que la formule énoncée est vraie vu que :

$$GW_{0,l}^B(c_1^B, \ldots, c_l^B; \sigma_B) := \int_{\mathcal{M}_{0,l}^B} \left( (ev^B)^* \bigwedge_{i=1}^{l} \alpha_i^B \right).$$

$\square$

# Chapitre 6

## APPLICATIONS ET EXEMPLE

### 6.1. Exemple de calcul

Nous donnons à présent un exemple de fibration Hamiltonienne qui induit une fibration non-triviale entre les strates supérieures des espaces de modules associés. L'exemple est le suivant. On considère la fibration :

$$(\mathbb{C}P^1, \omega_{FS}) \hookrightarrow \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{C}P^2}(1) \oplus \mathbb{C}) \xrightarrow{\pi} (\mathbb{C}P^2, \omega_{FS}).$$

$P := \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{C}P^2}(1) \oplus \mathbb{C})$ est donc la projectivisation du fibré complexe hermitien holomorphe de rang 2, $\pi : V := \mathcal{O}_{\mathbb{C}P^2}(1) \oplus \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}P^2$. Comme vu au premier chapitre, cette fibration est Hamiltonienne. Soit $J_0$ la structure complexe standard sur $\mathbb{C}P^2$. On dénotera par $J_P$ la structure intégrable fibrée sur $P$, induite par $J_0$, la structure de fibré complexe de $V$ et la connexion holomorphe hermitienne sur $V$. La forme de couplage est ici celle induite par la connexion holomorphe.

Nous calculons à présent la cohomologie de $P$. Positionnons nous dans le cadre général où $P$ est la projectivisation d'un fibré complexe hermitien $V$ de rang $r$ au-dessus de $\mathbb{C}P^n$. Désignons par $E$ le fibré tautologique au-dessus de $P$, i.e $E$ est le sous-fibré de $\pi^*V$ donné par :

$$E = \{(x, v) \in P \times V | v \in x\}.$$

Par définition, $E$ est un fibré en droite et nous désignerons par $\xi \in H^2(P; \mathbb{Z})$ la première classe de Chern associée au dual $E^*$. Notons que la restriction de $E$ à une fibre $P_x$ de $\pi$ dans $P$ nous donne le fibré tautologique usuel au-dessus de $\mathbb{C}P^1$, donc par naturalité la restriction de $\xi$ à $P_x$ nous redonne le générateur positif de $H^2(\mathbb{C}P^{r-1};\mathbb{Z})$. Dès lors, les puissances $\xi^i$, pour $i = 0, ..., r-1$, engendrent après restriction la cohomologie des fibres de $P$ et par le théorème de Leray nous avons que :

$$H^*(P;\mathbb{Z}) \cong H^*(\mathbb{C}P^n;\mathbb{Z}) \otimes \{1, \xi, ..., \xi^{r-1}\}.$$

De plus, la restriction de $\xi^r$ à chaque fibre doit s'annuler de sorte qu'il existe des classes $c_i(V) \in H^{2i}(\mathbb{C}P^n;\mathbb{Z})$, $i = 1, ..., r$ telles que

$$\xi^r + \sum_{i=1}^{r} c_i(V)\xi^{r-i} = 0.$$

Ces classes sont appelées classes de Chern associées à $V$ et notons que dans la présente situation nous pouvons les réécrire comme $c_i(V) = c_i h^i$ où $c_i \in \mathbb{Z}$ et $h \in H^2(\mathbb{C}P^n, \mathbb{Z})$ est le générateur positif de la cohomologie de $\mathbb{C}P^n$. Posons $h = \pi^* h \in H^2(P, \mathbb{Z})$, alors nous obtenons finalement que :

$$H^*(P;\mathbb{Z}) \cong \frac{\mathbb{Z}[h, \xi]}{\{\xi^r + \sum_{i=1}^r c_i h^i \xi^{r-i} = 0\}}.$$

Dans notre cas nous obtenons donc que

$$H^*(P;\mathbb{Z}) \cong \frac{\mathbb{Z}[h, \xi]}{\{\xi^2 + h\xi = 0\}},$$

car $c_1(V) = h$ et $c_2(V) = 0$ ici. On en conclut, par dualité de Poincaré que $H_2(P;\mathbb{Z})$ est engendré par les duaux de Poincaré des classes $h^2$ et $h\xi$.

Soit $L \in H_2(\mathbb{C}P^2;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ le générateur positif représenté par les droites de $\mathbb{C}P^2$. Nous avons $L = PD(h)$. Soit $L_0 \in H_2(P;\mathbb{Z})$ le dual de Poincaré de $h^2 + h\xi$. Nous avons alors que $\pi_* L_0 = L$ puisque $\pi_*(h \cup \xi) = h$ et $\pi_*(h^2) = 0$, où $\pi_*$ désigne l'intégration le long de la fibre. $\pi$ induit la projection

$$\mathcal{F}_\pi : \overline{\mathcal{M}}(P, L_0, J_P) \longrightarrow \overline{\mathcal{M}}(\mathbb{C}P^2, L, J_0) = \mathcal{M}(\mathbb{C}P^2, L, J_0)/PSL_2(\mathbb{C}) = (\mathbb{C}P^2)^*,$$

où $(\mathbb{C}P^2)^*$ représente l'ensemble des droites de $\mathbb{C}P^2$. L'espace de modules est en fait constitué de deux strates : $\mathcal{S}_0$ la strate supérieure des courbes simples, et $\mathcal{S}_1$ la strate composée des applications stables avec deux composantes, l'une étant une composante racine représentant la classe (du diviseur exeptionnel) $PD(h\xi)$, et l'autre étant une composante de branche représentant la classe $PD(h^2) = [\mathbb{C}P^1]$

de la fibre vue dans $P$. Notons que ces strates ne sont composées que d'éléments irréductibles. On montre à présent que la structure complexe $J_P$ est régulière pour ces deux strates.

**Lemme 6.1.1.** *La structure complexe fibrée $J_P$ est régulière et paramétrique pour la classe $L_0$.*

**Preuve:** Notons tout d'abord que $J_0 \in \mathcal{J}_{irr}(L)$ car $L$ est $J_0$-indécomposable. Pour $u$ dans $\mathcal{S}_0$, en utilisant la suite exacte (2.2.9) il ne nous reste qu'à montrer que coker $D_u^v = 0$. Mais $J_P$ étant intégrable, nous avons que

$$\text{coker } D_u^v = H^{0,1}(S^2, u^*TP^v) = H^{0,1}(S^2, \mathcal{O}_{\mathbb{C}P^2}(1)) \cong H^0(S^2, \mathcal{O}(-3)) = 0.$$

Nous devons désormais montrer que pour tout $(u_1, u_2, y_{12}, y_{21}) \in \mathcal{S}_1$, avec $u_1$ composante principale et $u_2$ composante de branche, les conoyaux coker $D_{u_1}^v$ et coker $D_{u_2}^v$ s'annulent et que pour toute droite $D \in (\mathbb{C}P^2)^*$, l'application d'évaluation des arêtes :

$$ev : \mathcal{F}_\pi^{-1} \cap \mathcal{S}_1 \longrightarrow \pi^{-1}(b) \times \pi^{-1}(b), \quad (u_1, u_2, y_{12}, y_{21}) \mapsto (u_1(y_{12}), u_1(y_{21})),$$

est transverse à la diagonale $\Delta_{\pi^{-1}(b)}$, où $b$ désigne la projection de l'unique point d'intersection $\bar{b}$ entre $u_1$ et $u_2$. Mais pour toute courbe holomorphe représentant $[\mathbb{C}P^1]$ nous avons que coker $D_{u_2}^v = H^{0,1}(S^2, T\mathbb{C}P^1) = 0$. De même

$$\text{coker } D_{u_1}^v = H^{0,1}(S^2, u_1^*TP^v) = H^{0,1}(S^2, \mathcal{O}(-1)) = 0.$$

Notons enfin que pour tout élément $X_0 \in T_{\bar{b}}\pi^{-1}(b)$ il existe un champs de vecteur holomorphe sur $\mathbb{C}P^1 \cong \pi^{-1}(b)$ prenant pour valeur $X_0$ en $\bar{b}$, d'où l'on dérive la transversalité.

□

Notons que si $D$ désigne une droite de $\mathbb{C}P^2$, $P|_D$ est identifié à $\widetilde{\mathbb{C}P}^2$, l'éclatement de $\mathbb{C}P^2$ en un point. Les fibres de $\mathcal{F}_\pi$ sont alors données par $\overline{\mathcal{M}}(\widetilde{\mathbb{C}P}^2, L_0, J)$ où $J$ désigne ici la structure complexe de la surface de Hirzebruch $\mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{C}P^1}(1) \oplus \mathbb{C})$, et $L_0$ désigne la classe représentée par la section nulle. Remarquons aussi que $\mathcal{M}^*(\widetilde{\mathbb{C}P}^2, L_0, J)$ correspond à l'ensemble des sections holomorphes du faisceau holomorphe $\mathcal{O}_{\mathbb{C}P^1}(1)$ lequel est identifié à

$$H^0(\mathbb{C}P^1, \mathcal{O}_{\mathbb{C}P^1}(1)) = \mathbb{C}\langle u, v\rangle ,$$

où $[u : v]$ dénote les coordonnées homogènes de $\mathbb{C}P^1$. La fermeture géométrique de Gromov correspond ici à ajouter la droite à l'infini, et nous obtenons ainsi que

$$\overline{\mathcal{M}}(\widetilde{\mathbb{C}P}^2, L_0, J) = \mathbb{C}P^2.$$

Nous prouvons ci-dessous que $\mathcal{F}_\pi$ est une fibration non triviale, plus précisément que c'est un fibré de fibre $\mathbb{C}P^2$ obtenu comme projectivisation d'un fibré complexe de rang 2 au-dessus de $(\mathbb{C}P^2)^*$ qui lui est non trivial.

Considérons la variété d'incidence :

$$W := \left\{(p, l) \in \mathbb{C}P^2 \times (\mathbb{C}P^2)^* \mid p \in l\right\},$$

et soient $p_1$, $p_2$ les projections sur le premier et deuxième facteur respectivement. Observons que $p_2 : W \longrightarrow (\mathbb{C}P^2)^*$ est le fibré tautologique au-dessus de $(\mathbb{C}P^2)^*$, i.e. $(W, p_2) = \mathbb{P}(\mathcal{O}_{(\mathbb{C}P^2)^*}(-1) \oplus \mathbb{C})$. Soit le faisceau au-dessus de $(\mathbb{C}P^2)^*$ :

$$\mathcal{R} := p_{2*}p_1^*\mathcal{O}_{\mathbb{C}P^2}(1),$$

où $p_{2*}$ désigne ici l'image directe induite par l'application (continue) $p_2$. Le germe de ce faisceau en le point $D \in (\mathbb{C}P^2)^*$ est donné par

$$H^0(p_2^{-1}(D), \mathcal{O}_{\mathbb{C}P^1}(1)|_{p_2^{-1}(D)}) \cong H^0(\mathbb{C}P^1, \mathcal{O}_{\mathbb{C}P^1}(1)).$$

Par conséquent, nous obtenons que $\mathcal{R} = \mathcal{S}_0$. Maintenant, soit $\mathcal{D}$ une droite de $(\mathbb{C}P^2)^*$. Sa préimage par $p_2$ correspond à l'éclatement en un point de $\mathbb{C}P^2$ (le point en question étant donné par l'intersection de toutes les droites données par $\mathcal{D}$). Or, en posant :

$$\mathcal{D} = \mathbb{C}P^1 = D^+ \bigsqcup D^- / \lambda \sim \lambda^{-1} \text{ sur } D^+ \cap D^-,$$

où $D^+$ la 2-sphère moins le pôle nord et $D^-$ désigne la 2-sphère moins le pôle sud, alors

$$p_2^{-1}(\mathcal{D}) = \widetilde{\mathbb{C}P}^2 = \frac{D^+ \times \mathbb{C}P^1 \bigsqcup D^- \times \mathbb{C}P^1}{(\lambda, [u : v]) \sim (\lambda^{-1}, [\lambda u : v]) \text{ pour } \lambda \neq 0}.$$

Enfin, il en suit que

$$\mathcal{R}|_{\mathcal{D}} = \frac{D^+ \times \mathbb{C}^2 \coprod D^+ \times \mathbb{C}^2}{(\lambda, (u,v)) \sim (\lambda^{-1}, (\lambda u, v)) \text{ pour } \lambda \neq 0},$$

de telle sorte que

$$\mathcal{R}|_{\mathcal{D}} = \mathcal{O}_{\mathbb{C}P^1}(-1) \oplus \mathbb{C}$$

et nous concluons par là même que $\mathcal{F}_\pi$ doit être non triviale.

Nous terminons cette section en calculant

$$GW^P_{0,2}(pt, pt; L_0).$$

Notons que dans le cas présent, l'homologie de la fibre s'injecte dans celle de l'espace totale car l'image de la classe fondamentale $[\mathbb{C}P^1]$ est donnée par $PD(h^2) \neq 0$. Alors la formule produit se simplifie et nous avons :

$$GW^P_{0,2}(pt, pt; L_0) \quad = \quad GW^{\mathbb{C}P^2}_{0,2}(pt, pt; L).GW^{P|_C}_{0,2}(pt, pt; PD((\iota^{P|_C}_C)^*(h^2 + h\xi))),$$

où $C$ représente l'image d'une application holomorphe dans la base, représentant une droite et passant par deux points. En l'occurrence il n'en existe qu'une telle, et nous avons d'autre part que $P|_C = \widetilde{\mathbb{C}P}^2$. De surcroît

$$PD((\iota^{P|_C}_C)^*(h^2 + \xi)) = PD_{P|_C}(h + \xi)$$

et il est connu que

$$GW^{\widetilde{\mathbb{C}P}^2}_{0,2}(pt, pt; PD_{P|_C}(h + \xi)) = 1.$$

Nous concluons ainsi que

$$GW^P_{0,2}(pt, pt; L_0) = 1$$

## 6.2. L'isomorphisme de Seidel

Pour débuter cette section, nous rappelons la définition du $q$-ème groupe d'homologie quantique pour $(F, \omega)$. Désignons par $\Lambda$ l'anneau de Novikov du groupe $\mathcal{L} := H^S_2(F; \mathbb{Z})/\sim$ où :

$$B \sim B' \;\text{ si }\; \omega(B - B') = c_1^{TF}(B - B') = 0.$$

Par conséquent, les éléments de $\Lambda$ sont de la forme

$$\sum_{B\in\mathcal{L}} \lambda_B e^B,$$

où il n'y a qu'un un nombre fini d'éléments $\lambda_B$ non nuls, tels que $\omega(B) < \kappa$. Cet anneau de Novikov est un anneau gradué, dont la graduation est donnée par :

$$\Lambda_j := \{\sum_{B\in\mathcal{L}} \lambda_B e^B \in \Lambda \mid 2c(B) = j\}.$$

**Définition 6.2.1.** *Le q-ème groupe d'homologie quantique est défini comme étant le $\Lambda$-module :*

$$QH_q(F,\Lambda) := \bigoplus_{i+j=q} H_i(F;\mathbb{Z}) \otimes \Lambda_j.$$

Pour un élément $a \otimes e^B \in QH_*(F,\Lambda)$, la graduation est donnée par

$$\deg(a\otimes e^B) = \deg(a) + 2c(B).$$

Cette homologie quantique est en fait un anneau dont la structure d'anneau $\star_F$ est l'extension $\Lambda$-linéaire du produit :

$$a \star_F b := \sum_{B\in\mathcal{L}} (a\star_F b)_B \otimes e^B \tag{6.2.1}$$

où $a \in H_i(F;\mathbb{Z})$, $b \in H_j(F;\mathbb{Z})$, et où $(a\star_F b)_B \in H_{i+j-2n_F-2c(B)}(F;\mathbb{Z})$ est la classe d'homologie définie par intersection de la façon suivante :

$$(a\star_F b)_B \cdot_F c = GW^F_{0,3}(a,b,c;B).$$

Ici, $\cdot_F$ désigne le produit d'intersection ordinaire sur $F$.

Etant donné un lacet $\phi \in \mathcal{L}\mathrm{Ham}(F,\omega)$, nous avons vu au premier chapitre que nous pouvons lui associer une fibration Hamiltonienne $\pi : P_\phi \longrightarrow S^2$ de fibre $F$, avec forme de couplage $\tau_\phi$, et classe de Chern verticale $c_\phi$.

**Définition 6.2.2.** *Soit $\phi \in \mathcal{L}Ham(F,\omega)$, et $\sigma$ une classe d'équivalence de section de $P_\phi$ telle que $d = 2c_\phi(\sigma)$. Le morphisme de Seidel est l'application $\Lambda$-linéaire*

$$\Psi_{\phi,\sigma} : QH_*(F) \longrightarrow QH_{*+d}(F),$$

*telle que pour $a \in H_*(F;\mathbb{Z})$, l'image $\Psi_{\phi,\sigma}(a)$ satisfait :*

$$\Psi_{\phi,\sigma}(a)\cdot_F b = \sum_{B\in\mathcal{L}} GW^{P_\phi}_{0,2}(\iota^{P_\phi}_F(a), \iota^{P_\phi}_F(b); \sigma + \iota(B))e^B$$

*où* $\iota_F^{P_\phi} : H_*(F) \longrightarrow H_*(P_\phi)$ *désigne l'homomorphisme induit par le plongement de* $F$ *dans* $P_\phi$.

Par définition, l'homomorphisme de Seidel encode les courbes $J_{P_\phi}$-holomorphes avec deux points marqués, représentant une certaine classe d'équivalence de section, et qui intersectent transversalement des cycles $V_a$ et $V_b$ se trouvant respectivement dans les fibres au-dessus de 0 et $\infty$. Notons que par l'axiome des diviseurs nous avons que :

$$GW_{0,2}^{P_\phi}(\iota_F^{P_\phi}(a), \iota_F^{P_\phi}(b); \sigma + \iota_F^{P_\phi}(B)) = GW_{0,3}^{P_\phi}(\iota_F^{P_\phi}(a), \iota_F^{P_\phi}(b), [F]; \sigma + \iota_F^{P_\phi}(B)).$$

En écrivant $\Psi_{\phi,\sigma}(a)$ comme la somme formelle :

$$\Psi_{\phi,\sigma}(a) := \sum_{B\in\mathcal{L}} (\Psi_{\phi,\sigma}(a))_B \otimes e^B,$$

nous obtenons

$$(\Psi_{\phi,\sigma}(a))_B \cdot_F b := GW_{0,2}^{P_\phi}(\iota_F^{P_\phi}(a), \iota_F^{P_\phi}(b); \sigma + \iota_F^{P_\phi}(B)),$$

qui, par un simple calcul de dimension, est nul à moins que

$$2n_F = deg(a) + deg(b) + 2c_\phi(\sigma + \iota(B)).$$

Le théorème suivant est dû à Seidel [41] et Lalonde-McDuff-Polterovich [20] :

**Théorème 6.2.1.** (*Lalonde-McDuff-Polterovich*) *Pour tout lacet* $\phi \in \mathcal{L}Ham(F,\omega)$ *et toute classe d'équivalence de section* $\sigma$, *le morphisme* $\Psi_{\phi,\sigma}$ *est un isomorphisme. En particulier,* $\forall\ a \in H_*(F;\mathbb{Z})$, *il existe* $b \in H_*(F;\mathbb{Z})$ *et une classe d'équivalence de section* $\sigma \in H_2^S(P_\phi)$ *telle que*

$$GW_{P_\phi}(\iota_F^{P_\phi}(a), \iota_F^{P_\phi}(b); \sigma) \neq 0.$$

**Preuve:** La première affirmation résulte d'une combinaison des deux observations suivantes. On remarque d'abord que pour $\phi = \mathrm{Id}$, et $\sigma_0$ une classe de section associée à la section constante :

$$\Psi_{id,\sigma_0} = \mathrm{Id}_{QH_*(F)}.$$

La deuxième observation est que pour deux lacets Hamiltoniens, $\phi$ et $\phi'$, et pour deux sections $\sigma$, $\sigma'$ de $P_\phi$ et $P_{\phi'}$ respectivement, nous avons la règle de composition :

$$\Psi_{\phi,\sigma} \circ \Psi_{\phi',\sigma'} = \Psi_{\phi\circ\phi',\sigma\#\sigma'},$$

où $\sigma\#\sigma'$ représente la somme connexe de $\sigma$ avec $\sigma'$ donnant par là même une section de $P_\phi\#P_{\phi'} = \Psi_{\phi\circ\phi'}$.

La deuxième affirmation se montre par contradiction. Supposons qu'il existe $a$ satisfaisant $\iota_F^{P_\phi}(a) \neq 0$, et telle que pour tout $b \in H_*(F;\mathbb{Z})$ et $\sigma \in H_2^S(P_\phi;\mathbb{Z})$ nous ayons :

$$GW_{0,2}^{P_\phi}(\iota_F^{P_\phi}(a), \iota_F^{P_\phi}(b); \sigma) = 0.$$

Par linéarité des invariants de Gromov-Witten nous concluons que $(\Psi_{\phi,\sigma}(a))_B \cdot_F b = 0$ pour tout $b \in H_*(F;\mathbb{Z})$ et $B \in H_2^S(F;\mathbb{Z})$. Dès lors $(\Psi_{\phi,\sigma}(a))_B = 0$ $\forall B \in H_2^S(F;\mathbb{Z})$, d'où $\Psi_{\phi,\sigma}(a) = 0$, ce qui contredit la première affirmation du théorème.

□

## 6.3. Scindement cohomologique et variétés uniréglées

On rappelle qu'une fibration $F \hookrightarrow P \longrightarrow B$ est dite **cohomologiquement scindée rationnellement**, ou simplement *c-split*, si on a :

$$H^\star(P;\mathbb{Q}) \cong H^\star(B;\mathbb{Q}) \otimes H^\star(F;\mathbb{Q}).$$

Cette propriété est en l'occurrence équivalente à dire que la suite spectrale de Leray-Serre en homologie (rationnelle) converge déjà à la deuxième page, et, que cette dernière est isomorphe au produit des homologies en tant que $\mathbb{Q}$-module. Ceci est en particulier donné si et seulement si le plongement de la fibre dans l'espace total induit une application injective en homologie.

Une variété symplectique $P$ est dite **symplectiquement uniréglée** s'il existe un invariant de Gromov-Witten non nul avec au moins un point comme contrainte géométrique ; autrement dit s'il existe une classe sphérique $\sigma \in H_2(P;\mathbb{Z})$ et des éléments $a_i \in H_*(P;\mathbb{Z})$ pour $i = 2, ..., l$, tels que

$$GW^P_{0,l}(pt, a_2, ..., a_l; \sigma) \neq 0.$$

Dans ce qui suit nous prouvons que lorsque la base d'une fibration Hamiltonienne possède un invariant de Gromov-Witten non nul avec cette fois deux insertions de point (en particulier la base est donc (symplectiquement) uniréglée), alors l'espace total est c-split et doit être uniréglé.

**Théorème 6.3.1.** *Soit $(F,\omega) \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} (B,\omega_B)$ une fibration Hamiltonienne au-dessus d'une base symplectique satisfaisant la condition 4.2.2. Supposons qu'il existe une classe d'homologie sphérique $\sigma_B \in H_2(B;\mathbb{Z})$ n'admettant que des décompositions effectives irréductibles, telle que $\mathcal{J}_{irr}(\sigma_B) \neq \emptyset$ et telle qu'il existe des classes $c_3^B, ..., c_l^B \in H_*(B)$ par rapport auxquelles nous avons*

$$GW^B_{0,l}(pt, pt, c_3^B, ..., c_l^B; \sigma_B) \neq 0.$$

*Alors la fibration hamiltonienne est c-split et est symplectiquement uniréglée.*

**Preuve:** Soit $C$ l'image d'une courbe $J_B$-holomorphe, $u_B$, comptée dans $GW^B_{0,l}(pt, pt, c_3^B, ..., c_l^B; \sigma_B)$, avec $J_B \in \mathcal{J}_{irr}(\sigma_B)$. La restriction $P_C$ de $P$ à $C$ est une fibration Hamiltonienne au-dessus de $S^2$. Par le théorème 6.2.1, pour toute classe $a \in H_*(F;\mathbb{Z})$ il existe une classe d'équivalence de sections $\sigma \in H_2(P_C;\mathbb{Z})/\sim$ ainsi qu'une classe d'homologie $b \in H_*(F;\mathbb{Z})$ telles que :

$$GW^{P_C}_{0,2}(\iota_F^{P_C}(a), \iota_F^{P_C}(b); \sigma) \neq 0.$$

Par l'axiome des diviseurs nous avons en fait l'égalité suivante :

$$GW^{P_C}_{0,2}(\iota_F^{P_C}(a), \iota_F^{P_C}(b); \sigma) = GW^{P_C}_{0,l}(\iota_F^{P_C}(a), \iota_F^{P_C}(b), \iota_F^{P_C}([F]), ..., \iota_F^{P_C}([F]); \sigma).$$

Par hypothèse, nous pouvons appliquer la formule produit et en utilisant l'équation (4.3.3) nous concluons que :

$$GW^P_{0,l}(\iota_F^P(a), \iota_F^P(b), \pi^{-1}(c_3^B), ..., \pi^{-1}(c_l^B); \iota^P_{P_C}(\sigma)) \neq 0, \qquad (6.3.1)$$

ce qui montre en l'occurrence que $P$ est uniréglée. Maintenant, supposons par contradiction que $\pi$ n'est pas c-split. Alors il existe $a \in H_*(F;\mathbb{Z})$ dans le noyau de $\iota_F^P$ impliquant que l'invariant de Gromov-Witten ayant $\iota_F^P(a)$ comme entrée, doit s'annuler. Mais cela contredirait l'équation (6.3.1), ce qui termine la preuve.

□

Comme corollaire directe, nous obtenons à nouveau, bien que moins généralement, le théorème de Lalonde et McDuff [19] concernant le scindement cohomologique des fibrations Hamiltoniennes au-dessus de $\mathbb{C}P^n$.

**Corollaire 6.3.2.** *Toute fibration Hamiltonienne au-dessus de $\mathbb{C}P^n$, avec fibre satisfaisant la condition 4.2.2, est c-split. Il en va de même pour toute telle fibration au-dessus de $(S^2 \times S^2, \omega_0 \oplus \omega_0)$.*

**Preuve:** Nous avons que $GW_{0,2}^{\mathbb{C}P^n}(pt, pt; L) = 1$, où $L \in H_2(\mathbb{C}P^n; \mathbb{Z})$ désigne ici la classe d'homologie représentant une droite de $\mathbb{C}P^n$. $L$ est primitive et nous pouvons donc appliquer le théorème précédent. Pour le produit de deux copies de $S^2$, on observe que $GW_{0,2}^{S^2\times S^2}(pt, pt; \Delta) = 1$ où $\Delta$ désigne la classe de la diagonale qui en l'occurrence n'admet que des décompositions effectives irréductibles.

□

Lalonde et McDuff ont en fait montré dans [19] que toute fibration Hamiltonienne au-dessus d'une variété (fermée) de dimension plus petite ou égale à trois, est c-split. Il ont aussi émis la conjecture selon laquelle un tel scindement devrait être réalisé par toute fibration Hamiltonienne. Nous donnons à présent une classe d'exemples où la base est de dimension 4 et pour lesquels scindement et uniréglage sont réalisés par toute fibration Hamiltonienne au-dessus de ces bases qui respectent la condition (4.2.2).

Soit $(B, \omega_B)$ une 4-variété symplectique et soit $\sigma_B \in H_2(B; \mathbb{Z})$ telle que $\sigma_B \cdot \sigma_B := k \geq 0$. Supposons que $\sigma_B$ peut être représentée par une 2-sphère symplectique plongée et, qu'il n'existe pas de 2-sphère symplectiquement plongée $C$, ayant pour auto-intersection :

$$-1 \leq C \cdot C < k.$$

Supposons à présent que $J_B$ est une structure presque complexe régulière sur $B$, alors on obtient le lemme suivant, tiré de [29] :

**Lemme 6.3.3.** *Soient $B$, $J_B$ et $\sigma_B$ comme ci-dessus. Alors $\mathcal{M}^*(B, \sigma_B; J_B)/PSL_2(\mathbb{C})$ est compact et l'application d'évaluation*

$$ev : \mathcal{M}_{0,k+1}(B, \sigma_B; J_B) \longrightarrow B^{k+1} \setminus \Delta^{k+1}$$

*est un difféormorphisme, où $\Delta^{k+1}$ représente la diagonale épaisse dans $B^{k+1}$.*

En particulier, ce lemme nous assure que $\sigma_B$ est indécomposable et que

$$GW^B_{0,k+1}(pt, ..., pt; \sigma_B) = 1.$$

Nous obtenons directement comme conséquence le résultat suivant :

**Corollaire 6.3.4.** *Toute fibration Hamiltonienne au-dessus d'une 4-variété symplectique comme dans le lemme 6.3.3, dont la fibre satisfait 0.0.1 est c-split et uniréglée.*

# APPENDICE

Nous montrons ici l'affirmation faite lors de la preuve du lemme 3.2.2. Nous avons besoin du résultat local suivant.

**Lemme 6.3.5.** *(McDuff-Salamon) Soient $p > 2$ et $r \geq 2$. Supposons que $J_P^H = (J_B, J, H) \in \mathcal{P}^r$, soit $u : S^2 \longrightarrow P$ une application $J_P^H$-holomorphe simple et non-constante, et soit $Z \subset S^2$ un ensemble fini. Soit $q > 1$ tel que $1/p + 1/q = 1$ et supposons que $\eta \in L^q(\Lambda^{0,1}_{J_P^H}(S^2, u^*TP^v))$ satisfait :*

$$\xi(Z) = 0 \quad => \quad \int_{S^2} \langle \eta, D_{J_P^H,u}\xi \rangle dvol_{S^2} = 0 \tag{6.3.2}$$

*pour tout $\xi \in W^{1,p}(S^2, u^*TP^v)$. Alors $\eta \in W^{r,p}_{loc}(\Lambda^{0,1}_{J_P^H}(S^2 \backslash Z, u^*TP^v))$ et $D^*_{J_P^H,u}\eta = 0$ sur $S^2 \backslash Z$. De surcroît, si $\eta$ s'annule sur un sous-ensemble ouvert non-vide, alors $\eta \equiv 0$.*

La preuve est mot pour mot celle donnée dans le chapitre 3 de [**29**]. La première partie est due aux résultats de régularité qui sont en l'occurrence démontrés dans l'appendice B de [**29**]. La deuxième partie quant à elle suit du principe de similarité de Carleman. On montre à présent l'affirmation.

**Lemme 6.3.6.** *Soient $p > 2$ et $r \geq 2$. Supposons que $J_P^H = (J_B, J, H) \in \mathcal{P}^r$, soit $u : S^2 \longrightarrow P$ une application $J_P^H$-holomorphe simple et non-constante, et soit $Z := \{z_0, z_1, ..., z_r\} \subset S^2$ un ensemble fini. Pour tout constante positive $\epsilon$, l'ensemble $L^p(\Lambda^{0,1}_{J_P^H}(S^2, u^*TP^v))$ coïncide avec*

$$A := \left\{ D_u^{v,H}\xi + \frac{1}{2}Y^v \circ (du)^v \circ j \mid \xi(z_r) = 0, \ r \geq 1, \ et \ supp(Y^v) \subset B_\epsilon(u(z_0)) \right\}$$

*si $\pi(u)$ est triviale et avec*

$$B := \left\{ D_u^{v,H}\xi + X^{0,1}_{f(du)} \mid \xi(z_r) = 0, \ r \geq 1, \ et \ supp(X_f) \subset B_\epsilon(u(z_0)) \right\}$$

*autrement.*

**Preuve:** Etant donné que l'opérateur $D_u^{v,H}$ est Fredholm, l'image du sous-espace

$$\{\xi \in W^{1,p}(S^2, u^*TP^v) | \xi(Z \backslash z_0) = 0\}$$

est fermée et a codimension finie. Ainsi les ensembles $A$ et $B$ sont fermés. Nous prouvons que $B$ est dense, la preuve pour $A$ étant essentiellement la même. Supposons qu'il existe $\eta \in L^q(\Lambda^{0,1}_{J_P^H}(S^2, u^*TP^v))$ annulant $B$. Alors par le lemme ci-dessus nous avons que $\eta \in W^{r,p}_{loc}(\Lambda^{0,1}_{J_P^H}(S^2 \backslash Z, u^*TP^v))$ et que :

$$\int_{S^2} \langle \eta, X^{0,1}_{f(du)} \rangle dvol_{S^2} = 0$$

pour tout $X_f$ avec support dans $B_\epsilon(u(z_0))$. Mais étant donné que $u$ est simple, $B_\epsilon(u(z_0))$ contient des points injectifs pour $u$, et il est donc possible de construire un Hamiltonien $f$ violant l'égalité ci-dessus à moins que $\eta$ s'annule en tout point injectif proche de $z_0$. Par conséquent nous concluons que $\eta$ s'annule identiquement sur tout $S^2$ par la deuxième affirmation du lemme précédent.

$\square$

# BIBLIOGRAPHIE


[1] R. Bott and Loring W. Tu. *Differential forms in algebraic topology*, volume 82 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1982.

[2] Olguta Buse. Relative family gromov-witten invariants and symplectomorphisms, 2001. Preprint, arXiv.org :math/0110313.

[3] Bohui Chen and An-Min Li. Symplectic virtual localization of gromov-witten invariants, 2006. Preprint, arXiv.org :math/0610370.

[4] Bohui Chen and Gang Tian. Virtual manifolds and localization, 2006. Preprint, arXiv.org :math/0610369.

[5] Andreas Floer. The unregularized gradient flow of the symplectic action. *Comm. Pure Appl. Math.*, 41(6) :775–813, 1988.

[6] K. Fukaya and K. Ono. Arnold conjecture and Gromov-Witten invariant. *Topology*, 38(5) :933–1048, 1999.

[7] P. Griffiths and J. Harris. *Principles of algebraic geometry*. Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], New York, 1978. Pure and Applied Mathematics.

[8] M. Gromov. Pseudoholomorphic curves in symplectic manifolds. *Invent. Math.*, 82(2) :307–347, 1985.

[9] V. Guillemin, E. Lerman, and Sh. Sternberg. *Symplectic fibrations and multiplicity diagrams*. Cambridge University Press, Cambridge, 1996.

[10] Joe Harris and Ian Morrison. *Moduli of curves*, volume 187 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1998.

[11] Morris W. Hirsch. *Differential topology*, volume 33 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1994. Corrected reprint of the 1976 original.

[12] J. Hu, T-J. Li, and Y. Ruan. Birational cobordism invariance of uniruled symplectic manifolds, 2006. Preprint, arXiv.org :math/0611592.

[13] Christoph Hummel. *Gromov's compactness theorem for pseudo-holomorphic curves*, volume 151 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1997.

[14] Sh. Kobayashi and K. Nomizu. *Foundations of differential geometry. Vol. I.* Wiley Classics Library. John Wiley & Sons Inc., New York, 1996. Reprint of the 1963 original, A Wiley-Interscience Publication.

[15] Sh. Kobayashi and K. Nomizu. *Foundations of differential geometry. Vol. II.* Wiley Classics Library. John Wiley & Sons Inc., New York, 1996. Reprint of the 1969 original, A Wiley-Interscience Publication.

[16] M. Kontsevich and Yu. Manin. Gromov-Witten classes, quantum cohomology, and enumerative geometry. *Comm. Math. Phys.*, 164(3) :525–562, 1994.

[17] M. Kontsevich and Yu. Manin. Quantum cohomology of a product. *Invent. Math.*, 124(1-3) :313–339, 1996. With an appendix by R. Kaufmann.

[18] Maxim Kontsevich. Enumeration of rational curves via torus actions. In *The moduli space of curves (Texel Island, 1994)*, volume 129 of *Progr. Math.*, pages 335–368. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1995.

[19] F. Lalonde and D. McDuff. Symplectic structures on fiber bundles. *Topology*, 42(2) :309–347, 2003.

[20] F. Lalonde, D. McDuff, and L. Polterovich. Topological rigidity of Hamiltonian loops and quantum homology. *Invent. Math.*, 135(2) :369–385, 1999.

[21] Hong-Van Le and Kaoru Ono. Parameterized gromov-witten invariants and topology of symplectomorphism groups, 2007. Preprint, arXiv.org :0704.3899.

[22] J. Li and G. Tian. Virtual moduli cycles and Gromov-Witten invariants of general symplectic manifolds. In *Topics in symplectic 4-manifolds (Irvine, CA, 1996)*, First Int. Press Lect. Ser., I, pages 47–83. Int. Press, Cambridge, MA, 1998.

[23] G. Liu. Associativity of quantum multiplication. *Comm. Math. Phys.*, 191(2) :265–282, 1998.

[24] G. Liu and G. Tian. Floer homology and Arnold conjecture. *J. Differential Geom.*, 49(1) :1–74, 1998.

[25] D. McDuff. The virtual moduli cycle. In *Northern California Symplectic Geometry Seminar*, volume 196 of *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2*, pages 73–102. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.

[26] D. McDuff. Quantum homology of fibrations over $S^2$. *Internat. J. Math.*, 11(5) :665–721, 2000.

[27] D. McDuff and D. Salamon. *J-holomorphic curves and quantum cohomology*, volume 6 of *University Lecture Series*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1994.

[28] D. McDuff and D. Salamon. *Introduction to symplectic topology*. Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, second edition, 1998.

[29] D. McDuff and D. Salamon. *J-holomorphic curves and symplectic topology*, volume 52 of *American Mathematical Society Colloquium Publications*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2004.

[30] Dusa McDuff. Examples of symplectic structures. *Invent. Math.*, 89(1) :13–36, 1987.

[31] John W. Milnor and James D. Stasheff. *Characteristic classes*. Princeton University Press, Princeton, N. J., 1974. Annals of Mathematics Studies, No. 76.

[32] James R. Munkres. *Topology : a first course*. Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1975.

[33] S. Piunikhin, D. Salamon, and M. Schwarz. Symplectic Floer-Donaldson theory and quantum cohomology. In *Contact and symplectic geometry (Cambridge, 1994)*, volume 8 of *Publ. Newton Inst.*, pages 171–200. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1996.

[34] Z. Qin and Y. Ruan. Quantum cohomology of projective bundles over $\mathbf{P}^n$. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 350(9) :3615–3638, 1998.

[35] J. W. Robbin and D. A. Salamon. A construction of the Deligne-Mumford orbifold. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 8(4) :611–699, 2006.

[36] Y. Ruan. Topological sigma model and Donaldson-type invariants in Gromov theory. *Duke Math. J.*, 83(2) :461–500, 1996.

[37] Y. Ruan. Virtual neighborhoods and pseudo-holomorphic curves. In *Proceedings of 6th Gökova Geometry-Topology Conference*, volume 23, pages 161–231, 1999.

[38] Y. Ruan and G. Tian. A mathematical theory of quantum cohomology. *J. Differential Geom.*, 42(2) :259–367, 1995.

[39] Dietmar Salamon. Lectures on Floer homology. In *Symplectic geometry and topology (Park City, UT, 1997)*, volume 7 of *IAS/Park City Math. Ser.*, pages 143–229. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.

[40] M. Schwarz. *Morse homology*, volume 111 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1993.

[41] P. Seidel. $\pi_1$ of symplectic automorphism groups and invertibles in quantum homology rings. *Geom. Funct. Anal.*, 7(6) :1046–1095, 1997.

[42] Bernd Siebert. Symplectic Gromov-Witten invariants. In *New trends in algebraic geometry (Warwick, 1996)*, volume 264 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 375–424. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999.

[43] J-C. Sikorav. The gluing construction for normally generic $J$-holomorphic curves. In *Symplectic and contact topology : interactions and perspectives (Toronto, ON/Montreal, QC, 2001)*, volume 35 of *Fields Inst. Commun.*, pages 175–199. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003.

[44] A. Zinger. Enumerative vs. symplectic invariants and obstruction bundles. *J. Symplectic Geom.*, 2(4) :445–543, 2004.